# 滤波及其应用

FILTERING AND ITS APPLICATIONS

走向数学丛书

谢衷洁 著



走向数学丛书

# 滤波及其应用

谢衷洁　著

湖南教育出版社

# 滤波及其应用

## Filtering and its applications

谢衷洁 著

Zhongjie Xie

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行

湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷二厂印刷

787×1092毫米　32开　印张：7.625　字数：160,000

1995年8月第1版　1998年4月第2次印刷

ISBN 7—5355—2246—7/G·2241

定价：12.80元

“走向数学”丛書

陳省身題



## 作者简介

谢衷洁，男，1935年10月1日生于福建泉州。1954年高中毕业于北京师大附中，同年入北京大学数学力学系，1959年毕业于概率论专门化，后留校工作。1987年任教授，现任职于北京大学数理统计研究所副所长。主要研究方向是时间序列分析及应用，至今在国内外刊物和会议文集上已发表40多篇论文，并著有《概率论》(1985)，《时间序列分析》(1990)及国外World Scientific Pub. Co.出版的“Case Studies in Time Series Analysis”(1993)等专著。1986年曾获Vienna EMCSR组织委员会颁发的《最优论文奖》，1987年北京市科技进步二等奖，1990年国家教委科技进步一等奖，1991年国家自然科学奖三等奖等。

历任中国概率统计学会副秘书长，时间序列分析专业委员会主任，《应用概率统计》执行编委，《International Statistical Review》的Associate Editor等职。

# 前　言

王　元

从力学、物理学、天文学直到化学、生物学、经济学与工程技术，无不用到数学。一个人从入小学到大学毕业的十六年中，有十三四年有数学课．可见数学之重要与其应用之广泛．

但提起数学，不少人仍觉得头痛，难以入门，甚至望而生畏．我以为要克服这个鸿沟，还是有可能的．近代数学难于接触，原因之一大概是由于其符号、语言与概念陌生，兼之近代数学的高度抽象与概括，难于了解与掌握．我想，如果知道讨论的对象的具体背景，则有可能掌握其实质。显然，一个非数学专业出身的人，要把数学专业的教科书都自修一遍，这在时间与精力上都不易做到．若停留在初等数学水平上，哪怕做了很多难题，似亦不会有助于对近代数学的了解．这就促使我们设想出一套“走向数学”小丛书，其中每本小册子尽量

用深入浅出的语言来讲述数学的某一问题或方面，使工程技术人员，非数学专业的大学生，甚至具有中学数学水平的人，亦能懂得书中全部或部分含义与内容. 这对提高我国人民的数学修养与水平，可能会起些作用. 显然，要将一门数学深入浅出地讲出来，决非易事. 首先要对这门数学有深入的研究与透彻的了解. 从整体上说，我国的数学水平还不高，能否较好地完成这一任务还难说. 但我了解很多数学家的积极性很高，他们愿意为“走向数学”撰稿. 这很值得高兴与欢迎.

承蒙国家自然科学基金委员会、中国数学会数学传播委员会与湖南教育出版社支持，得以出版这套“走向数学”丛书，谨致以感谢.

# 序　言

本书是通过初等的数学知识来介绍近半个世纪以来无论在理论和应用上都得到了极其广阔的发展的一个领域—滤波. 滤波理论的出现，虽然从背景上看它是起源于电工类的信号提取问题或宇航中的控制问题，然而为这方面奠定数学基础的却不能不归功于二位数学大师—苏联的 A. H. Колмогоров 和美国的 N. Wiener，是他们为平稳随机过程的滤波理论作出了杰出的贡献. 随后 A. M. Яглом 对有理谱密度的滤波方法给出了系统的解决. 60 年代随着宇航技术时代的到来，空间飞行器的控制问题推动了 Kalman 滤波的出现—六、七十年代吸引了大批的数学工作者在此领域工作，也出现了大批的应用数学工作者，他们不仅关心其中的理论问题，还把滤波方法广泛地应用于医学、生理、经济、工业生产过程及国防等. 70 年代时间序列的理论和方法的出现又从另一个角度和滤波问题挂起勾来，从而也就更深入地推动它的理论和应用（目前，这方面还在发展之中）. 尤其应该提到的是随着信息时代的到来，高科技的一个重要领域是和滤波问题紧密相关的，例如：图象的传输、识别、加工等都蕴含着二维或高维甚至是时空的（Spatial）滤波问题. 这方面从数学上看仍然存在许多问题没有解决，也是近年来许多数

学工作者工作的重点领域之一.

由于本书的任务是介绍读者去初步认识什么是滤波问题，它有什么用处，因而不可能全面地展开滤波的数学理论. 由于数学工具的限制，许多内容不能在本书中介绍，但在初等知识的范围内读者可以看到：工程的、实际的背景是如何提出并提成数学问题的；反过来，数学问题的解决或理论背景的支持又如何指导实际问题取得成果的. 如 MinMax 滤波如何运用于海洋石油勘探的；极大信噪比滤波如何帮助天文工作者发现了天王星的光环；X-11 如何运用于经济预测；Kalman 滤波如何应用于散射通信与生理医学等等.

本书对数学知识的要求是初等微积分和线性代数. 本书头二章是为没学过概率统计和线性系统知识的读者写的，对于具有这方面知识的读者可以从第三章开始阅读.

限于水平和写作时间的限制，本书一定有许多不妥之处，恳请读者提出批评，将来若有修改的机会，必根据读者的宝贵意见作修改和补充. 图象滤波这次没能写入本书就是一项缺陷.

作者愿借此机会对李忠教授表示衷心的感谢，是在他的鼓励和帮助下作者才鼓起勇气提笔写出这本书的；本书的一些新结果是属于国家自然科学基金会“应用统计”资助项目的，在此也表示诚挚的谢意.

**谢衷洁**

于北大承泽园

1994.6.1

# 目　录

# 第一章　概率统计基本知识

## §1　随机变量及其分布

### 1.1　随机现象及其统计规律性.

在我们的日常生活中，经常会遇到各种各样的随机现象——即人们常说的偶然现象，它们的出现与否是随机会而变的. 在重复观察中，它们的出现与否是不能预料的. 例如：

1. 掷一枚匀称的硬币看它是否出国徽.
2. 买一只灯泡，它的寿命是否超过 500 小时.
3. 在一小时内，某电话机接到 3 次以上的呼叫.
4. 某厂生产的电视机一万小时内不出现任何故障和异常.
5. 某市股票价格半年内将降至最低点.
6. 某产品的开箱合格率为 100%.

等等. 类似的例子还可以举出很多，读者也一定有许多与随机现象打过交道的体会. 因而认识到随机现象是普遍存在的，在现实世界中它是事物发展的正常现象.

虽然人们事先无法预料随机现象的结果，但是并不是说它毫无规律可言，事实上经过大量的实验，随机现象的规律性仍

然是可以认识的——只是这种规律不同于通常人们理解的确定性的规律(如物理学中的 $F=ma$ 等等). 随机现象的规律性往往体现在大数量的观察之中. 历史上大量的科学实践以及近代概率理论，都揭示出随机现象的稳定规律——在大量同类随机现象中所出现的一种集体性质的规律性，我们称为统计规律性.

例如：掷一枚硬币能出现国徽是属偶然现象. 但是如果人们多次重复投掷同一枚硬币，就会发现一种明显的规律性：即出现国徽的次数约占投掷总次数的一半. 下表 1.1 就是历史上许多学者进行这一实验的记录.

| 实验者 | 投掷次数 | 出现国徽次数 | 百分比 |
|---|---|---|---|
| 莫岗 | 2048 | 1017 | 0.4966 |
| 莫岗 | 2048 | 1039 | 0.5073 |
| 蒲丰 | 4040 | 2048 | 0.5069 |
| 皮尔逊 | 12000 | 6019 | 0.5016 |
| 皮尔逊 | 24000 | 12012 | 0.5005 |
| 维尼 | 30000 | 14994 | 0.4998 |

表 1.1

由以上记录可以看出，随着投掷次数的增多，这一百分比愈来愈接近于 50% (见图 1.1). 这一结果并不奇怪，因为匀称的硬币有两面，国徽的一面占 1/2=0.5.

再举一例子.

曾有人统计过某国家因没有写清地址或其它原因无法投递的信件数占全体信件的比例数许多年几乎保持不变 (见表 1.2).

| 年份 | 信件总数 $n$（百万） | 无法投递的信件数 $\mu$ | $\frac{\mu}{n}$（百万分数） |
|---|---|---|---|
| 1906 | 983 | 54861 | 56 |
| 1907 | 1076 | 53500 | 50 |
| 1908 | 1214 | 59627 | 49 |
| 1909 | 1357 | 62088 | 46 |
| 1910 | 1507 | 76614 | 51 |

表 1.2

法国数学家 Laplace 对生男生女性别比例的统计也得到过非常惊人的稳定规律（见格涅坚科 [18]）.

许多例子非常令人信服地认识到大量同类随机现象的重复实验（观察）往往呈现十分明显和稳定的规律性即统计规律性.

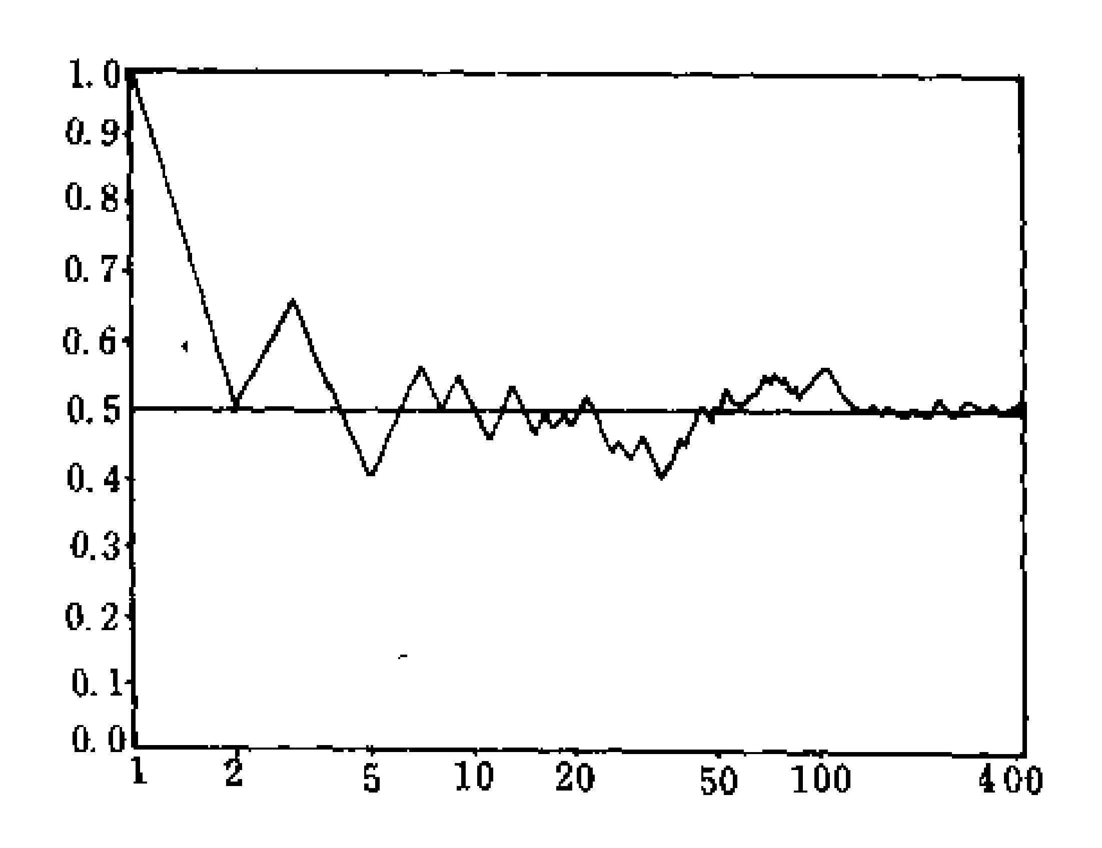



图 1.1 投掷硬币出国徽的百分比数，随着次数的增加而接近于 1/2.
（上图见：H. Cramèr：Mathematical Methods of Statistics.）

随机事件出现的可能性的大小是一个客观指标，如上述掷硬币，可以认为“观察一次可出国徽的可能性为 1/2”；它的含义就是在 $N$ 次实验中（当 $N$ 很大）出国徽的次数约为 $N/2$. 描述随机事件出现可能性大小的值称为概率. 例如：以 $A$ 表掷硬币出国徽的事件，它是随机的，它出现的可能性，即发生的概率为 1/2，记为

$$P\{A\} = \frac{1}{2}. \tag{1.1}$$

又例如：掷一匀称的骰子，它可能出“1”，“2”，…，“6”六种点数. 记 $B = \{出 2 点\}$，它是随机事件，则

$$P\{B\} = \frac{1}{6}. \tag{1.2}$$

又令 $C = \{出偶数点\}$，则

$$P\{C\} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}. \tag{1.3}$$

以下称这种包含随机事件的实验（或观察）简称为随机实验. 一般随机事件的概率定义由以下给出：

**定义 1.1**（概率的统计定义） 设 $\mathscr{E}$ 是可以重复进行的随机实验，事件 $A$ 在每次实验中可能出现（也可能不出现）. 假定进行了 $N$ 次互不影响的独立实验，其中 $A$ 出现了 $\mu_N$ 次. 如果对充分大的 $N$，$\frac{\mu_N}{N}$ 接近于某个数值 $P_A$，并且随着 $N$ 的增加，一般说来，二者的偏差愈来愈小，则称 $A$ 为随机事件，并定义 $P_A$ 为 $A$ 的概率，记为

$$P\{A\} = p_A. \tag{1.4}$$

定义 1.1 给了概率的统计定义. 在许多场合 $P_A$ 可以通过排列组合算出，更一般的，虽然 $P_A$ 不可能知道，但定义 1.1 告

诉我们求 $P_A$ 近似值的方法，尤其在应用工作中往往用充分大的 $n$ 所对应的 $\mu_n/n$ 来作为 $p_A$ 的估计值.

统计定义 1.1 显然可以把必然事件和不可能事件（前者用 $\Omega$ 表示，后者记为 $\phi$）包含其中作为特例，显见

$$P\{\Omega\} = \frac{\mu_N}{N} = \frac{N}{N} = 1;$$

$$P\{\varphi\} = \frac{\mu_N}{N} = \frac{0}{N} = 0. \tag{1.5}$$

## 1.2 随机变量及其分布

在日常生活、科学实验等活动中，我们会遇到二种类型的随机现象：一种是它的各种可能的结果只有有限种或离散型的无穷多种(数学上称可列多种)；另一类称为连续型的，它的观测结果可能充满一个区间. 前者如：掷硬币，它的结果只有"1"(出国徽)和"0"(出反面)二种；掷骰子的结果只有"1"，"2"，…，"6"六种点数. 连续型的如考查本市每日的最高气温 $\xi$，则 $\xi$ 可能出现于$[-T_1, T_2]$中的一切可能值. 第一类称为离散型，第二类称为连续型. 为方便于数学上统一处理，我们以后约定，对离散型的实验结果都用数值(如 0，1，2…或给定 $x_1, x_2, \cdots, x_N$)表示；如用"1"表出国徽，在产品检验中用"1"表合格品，"0"表不合格品等等. 这是为了统一作数学上的处理也不影响对问题的分析. 于是不管是第一种的离散型或第二种的连续型的实验，我们现在都统一成这样的随机实验：即每进行一次观测或实验都得到一个数 $\xi$，它是随机会变化的量，简称为随机变量.

对离散型随机变量，它的可能的值及相应出现的可能性可用列表方法给出，记为

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1, x_2, \cdots, x_n \\ p_1, p_2, \cdots, p_n \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

(1.6) 右方矩阵上一排表示一切可能的实验结果，而 $p_i$ 为 $x_i$ 出现的概率（可能性）. 显然（1.6）应满足：

1. $p_i = P\{\xi = x_i\} > 0, i = 1,2,\cdots,n.$ (1.7)

2. $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1.$ (1.8)

如：掷硬币的实验，以“1”表出国徽，“0”出反面，

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ p, & 1-p \end{pmatrix}. \tag{1.9}$$

如匀称的硬币，则 $p = \frac{1}{2}, 1 - p = \frac{1}{2}$.

又如，在一袋中装有 2 个红色球，3 个白色球 5 个蓝色球，作任取一球看颜色的实验，此时令“1”代表出红色球，“2”出白色球，“3”出蓝色球，则实验结果 $\xi$ 是随机变量，它可能取值为 1，2，3，相应的概率为 0.2，0.3 和 0.5. 则(1.6)的表可列为

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1, & 2, & 3 \\ 0.2, & 0.3, & 0.5 \end{pmatrix} \tag{1.10}$$

理论上可以证明：只要有了（1.6）的概率分布表，则“任一随机事件 $A$”的概率都可以通过该表算出. 如（1.10）记 $A=$ {出“1”或“出 2”}，问 $A$ 出现的概率，则 $P\{A\} = 0.2 + 0.3 = 0.5$. 因此，在概率的意义上我们就掌握了上述摸球实验的规律性.

对于离散型可以用（1.6）的列表方式描述，但对于连续型随机变量 $\xi$（如温度，人的身高、体重等等）就不可能罗列它每一个点的可能取值和相应的概率（因有连续性无穷多种可能）. 此时，我们关心的是 $\xi$ 出现在“任一区间 $a<\xi<b$”的可能性的大小，即 $P\{a<\xi<b\}$的值.

为此，我们有以下的定义：

**定义 1.2** （连续型随机变量） 设随机实验的结果可以用变量 $\xi$ 取实数值表示，并且存在一个非负可积函数 $p(x)$，$-\infty<x<+\infty$，使得对于任何区间 $(a,b)$，有

$$P\{a<\xi<b\}=\int_a^b p(x)dx \tag{1.11}$$

成立，则称 $\xi$ 为连续型的随机变量，$p(x)$ 称为 $\xi$ 的概率密度函数（或简称概率密度）.

不难看出

$$\begin{aligned}P\{a<\xi\leqslant b\}&=P\{a\leqslant\xi<b\}=P\{a\leqslant\xi\leqslant b\}\\&=\int_a^b p(x)dx.\end{aligned} \tag{1.12}$$

并且 $$P\{\Omega\}=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\,dx=1. \tag{1.13}$$

更进一步，对任一随机事件 $A=\{\xi\in E\}$（表示 $\xi$ 出现在 $E$ 集合内）的概率为

$$P\{\xi\in E\}=P\{A\}=\int_E p(x)dx \tag{1.14}$$

其中(1.14)右边的表达式表示 $p(x)$ 函数在集合 $E$ 上求其积分值. 例如问 $A=\left\{\xi\in[-1,0]\cup\left[\frac{1}{2},1\right]\right\}$ 即随机变量出现在 $[-1,0]$ 或者 $[0.5,1]$ 之间的事件，其概率的计算方法为

$$\begin{aligned}&P\{\xi\in[-1,0]\cup[0.5,1]\}=P\{A\}\\&=\int_{[-1,0]\cup[0.5,1]}p(x)dx=\int_{-1}^{0}p(x)dx+\int_{0.5}^{1}p(x)dx.\end{aligned} \tag{1.15}$$

## 1.3 常见的随机变量的概率分布.

A. 常见的离散型的概率分布：

(1) 二项分布.

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ p, & q \end{pmatrix}, \tag{1.16}$$

其中 $1>p>0$，$q=1-p$. (1.17)

(2) 贝努里二项分布.

如果有一个基本的二项实验：出“1”的概率为 $0<p<1$，出“0”为 $q=1-p$，对该实验进行重复的独立观察 $n$ 次，要问：在 $n$ 次重复中“1”总共出现了 $k$ 次（$0\leqslant k\leqslant n$）的概率. 回答是

$$P_k = P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k};0 \leqslant k \leqslant n. \tag{1.18}$$

亦可表为

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 0, & 1, & 2, & \cdots, & k, & \cdots, & n \\ P_0, & P_1, & P_2, & \cdots, & P_k, & \cdots, & P_n \end{pmatrix}. \tag{1.19}$$

显然，$0\leqslant p_k\leqslant 1$，$0\leqslant k\leqslant n$. (1.20)

而且 $\Sigma_{k=0}^n P_k = \Sigma_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}$

$$= (p+q)^n = 1^n = 1. \tag{1.21}$$

贝努里二项分布（1.19）的最简单的问题是：掷一枚匀称的硬币有分布

$$\begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \tag{1.21}.$$

如今问：将该硬币投掷 50 次，它出国徽 $k$ 次的概率. 则回答为

$$P_k = P\{\xi = k\} = C_{50}^k \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(\frac{1}{2}\right)^{50-k} = \frac{1}{2^{50}} C_{50}^k, \tag{1.22}$$

$$(k = 0,1,2,\cdots,50).$$

如：问 50 次投掷中会出现 25 次国徽的概率为

$$P_{25} = \frac{1}{2^{50}} C_{50}^{25} = 0.1123. \tag{1.23}$$

又如，一车间生产的产品，其废品率为$\frac{3}{100}$；如今任意抽查50件，求不多于1件废品的概率．此时基本的二项实验为（记抽中废品用1表示）

$$\begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0.03, & 0.97 \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

所问的事件为$\{\xi=0\}$和$\{\xi=1\}$，故

$$\begin{aligned} P\{\xi \leqslant 1\} &= P_0 + P_1 \\ &= C_{50}^{0}(0.03)^0(0.97)^{50} + C_{50}^{1}(0.03)^1(0.97)^{49} \\ &= 0.2181 + 0.3372 = 0.5553. \end{aligned} \tag{1.25}$$

B. 常见的连续型的概率密度函数．

由（1.14）式可看出：对连续型的随机变量而言．要认识它的变化规律，关键是要掌握它的概率密度函数$p(x)$．因为一旦有了$p(x)$，则该随机变量$\xi$出现在任一范围$E$之内的可能性（即概率）都可以用（1.14）的积分算出或近似算出．

统计学家根据大量的考查与归纳，总结出以下几种重要的连续型的随机变量的概率密度函数：

(1) 均匀分布$U[a, b]$

它的概率密度可表为

$$p(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{当 } a \leqslant x \leqslant b; \\ 0, & \text{其它}. \end{cases} \tag{1.26}$$

其图象如图1.2所示．

显见：$p(x) \geqslant 0$，并$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx = 1$.

(2) 正态分布$N(a, \sigma^2)$.

它的概率密度可表为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, -\infty < x < +\infty. \tag{1.27}$$

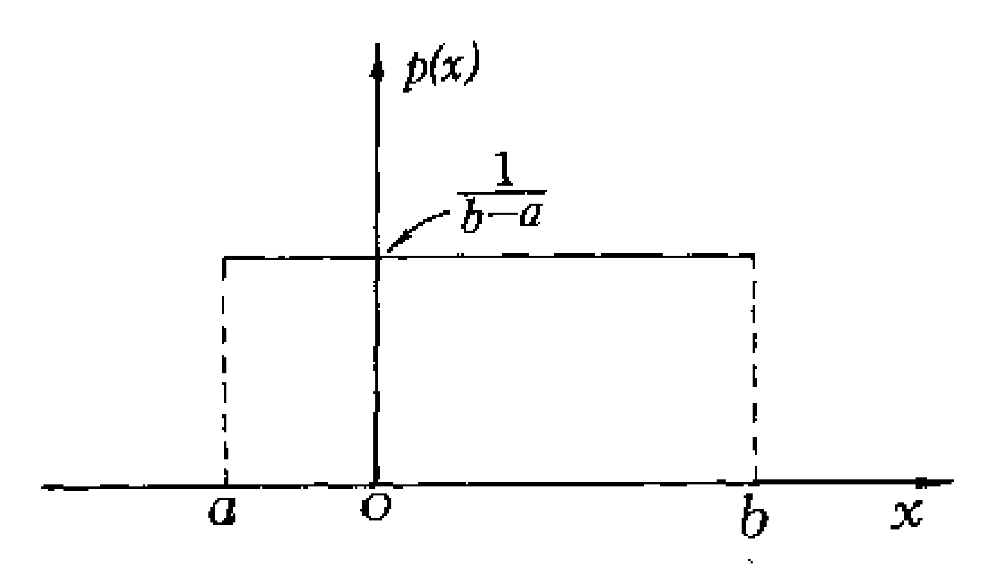



图 1.2 具有均匀分布密度函数的图形

其中 $a$ 为任意实数值，$\sigma>0$. 其图象如图 1.3 所示. 从中可以看出 $p(x)$ 的最大值是 $x=a$，它也是函数的对称轴所在. 而 $\sigma$ 值的大小，反映了 $p(x)$ 值的"胖"与"瘦". 当 $\sigma$ 很小时，$p(x)$ 很集中，也表示 $\xi$ 变量很大的概率取值在 $x=a$ 附近.

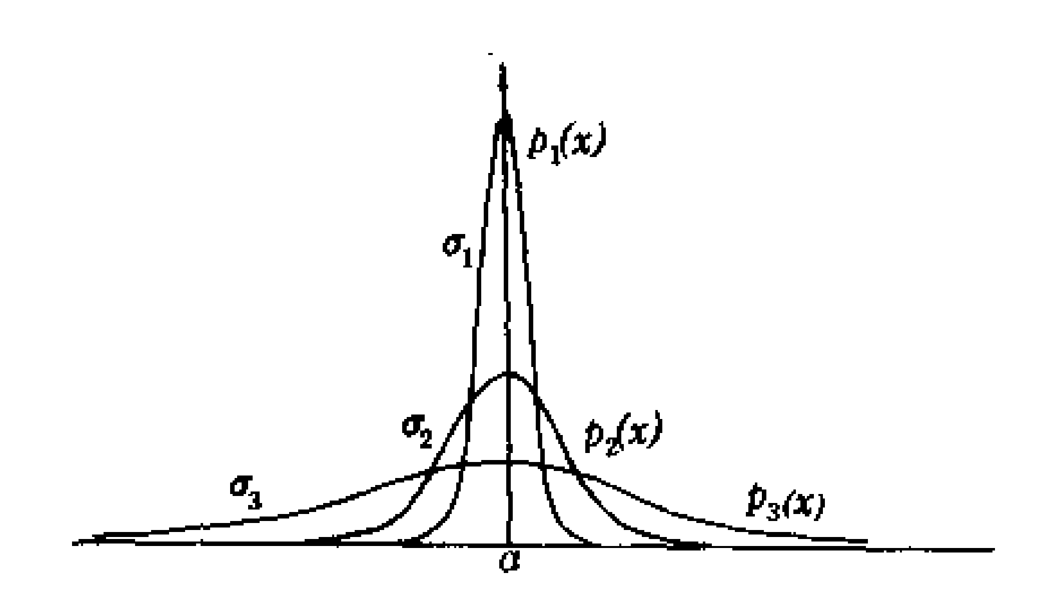



图 1.3 正态概率密度 $N(a,\sigma^2)$，中心值为 $a$，三种密度 $p_1(x)$、$p_2(x)$ 和 $p_3(x)$ 分别对应于 $\sigma_1<\sigma_2<\sigma_3$. 函数以 $a$ 为对称轴.

正态概率分布是最重要的一种概率分布，它描述了我们现实生活（包括科学实验）中最普遍存在的概率模型. 可以说绝

大部分常遇到的连续型随机变量都遵从正态分布．因而如果能取得一组对随机变量的观察样本 $x_1$，$x_2$，…，$x_N$，则统计学就可以告诉我们如何去估计它的概率密度（1.27）中的参数 $a$ 和 $\sigma$．一旦 $a$ 和 $\sigma$ 确定之后则与该随机变量 $\xi$ 有关的一切随机事件的概率都可以求得．

例如，以某地气温 $\xi$ 的变化为例，设想它是正态分布的，从气温观测 $x_1$，$x_2$，…，$x_{100}$中估得（后面将介绍如何估计）$\hat{a}=5$（℃），$\hat{\sigma}=10$，则它的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}10}e^{-\frac{(x-5)^2}{2\times 10^2}}=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-5)^2}{200}},\ -\infty<x<+\infty. \tag{1.28}$$

如果我们关心它出现冰点以下温度的可能性，可以用（1.14）式来求

$$P\{\xi\leqslant 0\}=\int_{-\infty}^{0}p(x)dx=\frac{1}{10\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{0}e^{-\frac{(x-5)^2}{2\times 10^2}}dx. \tag{1.29}$$

令 $u=\dfrac{x-5}{10}$，则 $dx=10du$，（1.29）可改写为

$$P\{\xi\leqslant 0\}=\int_{-\infty}^{-0.5}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du=\int_{0.5}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{u^2}{2}}du, \tag{1.30}$$

其中

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}},\ -\infty<x<+\infty. \tag{1.31}$$

称为标准正态密度函数，它对应于（1.27）的 $N$（0，1）.

为计算方便，标准 $N$(0，1）函数和它的积分都有表可查（见本书附录）．经查表可知

$$P\{\xi \leqslant 0\} = \int_{0.5}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0.3085. \qquad (1.32)$$

再如果关心出现 $\{\xi \geqslant 30\}$ 的概率，类似以上方法可求得

$$P\{\xi \geqslant 30\} = \int_{2.5}^{+\infty} \varphi(x)dx = 0.0063, \qquad (1.33)$$

等等.

一般地，$N(a,\sigma^2)$的概率计算都是通过变换，化成标准$N(0,1)$再查表算出数值的. 设想 $\xi$ 遵从$N(a,\sigma^2)$，而且要计算$P\{\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta\}$的数值，此时

$$P\{\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta\} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \qquad (1.34)$$

令 $u=\dfrac{x-a}{\sigma}$，则 $dx=\sigma du$，从而（1.34）可化为

$$P\{\alpha \leqslant \xi \leqslant \beta\} = \int_{\frac{\alpha-a}{\sigma}}^{\frac{\beta-a}{\sigma}} \varphi(u)du, \qquad (1.35)$$

其中，$\phi(x)$ 为(1.31)所示的 $N(0,1)$密度函数. (1.35)是一个重要的计算公式.

以下我们再介绍二个常见的，在统计学和本书要用的分布.

(3) $\chi^2$—分布

假定 $\xi_1$，$\xi_2$，…，$\xi_m$ 是 $m$ 个相互独立无关的* 随机变量，每个 $\xi_i$ 皆为 $N(0, 1)$ 变量，则

$$\eta = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \cdots + \xi_m^2$$

也是随机变量，它也是连续型的. $\eta$ 所对应的概率密度为

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2^{\frac{m}{2}}\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)} x^{\frac{m}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, & x \geqslant 0; \\ 0, & x < 0. \end{cases} \qquad (1.36)$$

* 见下一节多维随机变量的定义和独立性.

称为具有 $m$ 个自由度的 $\chi^2$ 分布，图形如图 1.4 所示.

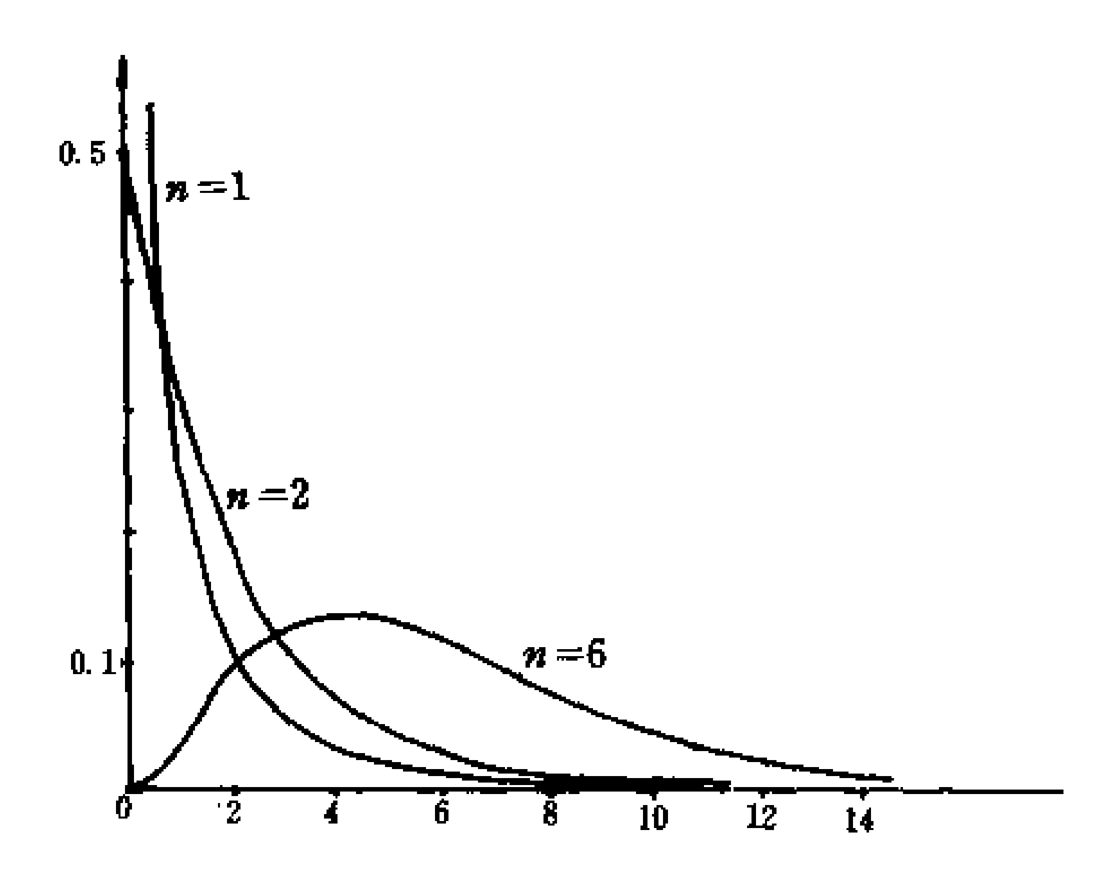



图 1.4 不同自由度所对应的 $\chi^2$ 分布密度函数

(1.36) 中的 $\Gamma(x)$ 为 $\Gamma$-函数，它的定义为

$$\Gamma(p)=\int_0^{\infty} x^{p-1}e^{-x}dx, p>0, \tag{1.37}$$

是有表可查的特殊函数.

(4) $F$—分布

称随机变量 $\xi$ 遵从自由度为 $(k_1, k_2)$ 的 $F$—分布，是指它的概率密度函数为

$$p(x)=\begin{cases}\dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)k_1^{\frac{k_1}{2}}\cdot k_2^{\frac{k_2}{2}}\cdot x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)(k_2+k_1x)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, & x\geqslant 0; \\ 0, & x<0.\end{cases} \tag{1.38}$$

其图象如图 1.5 所示.

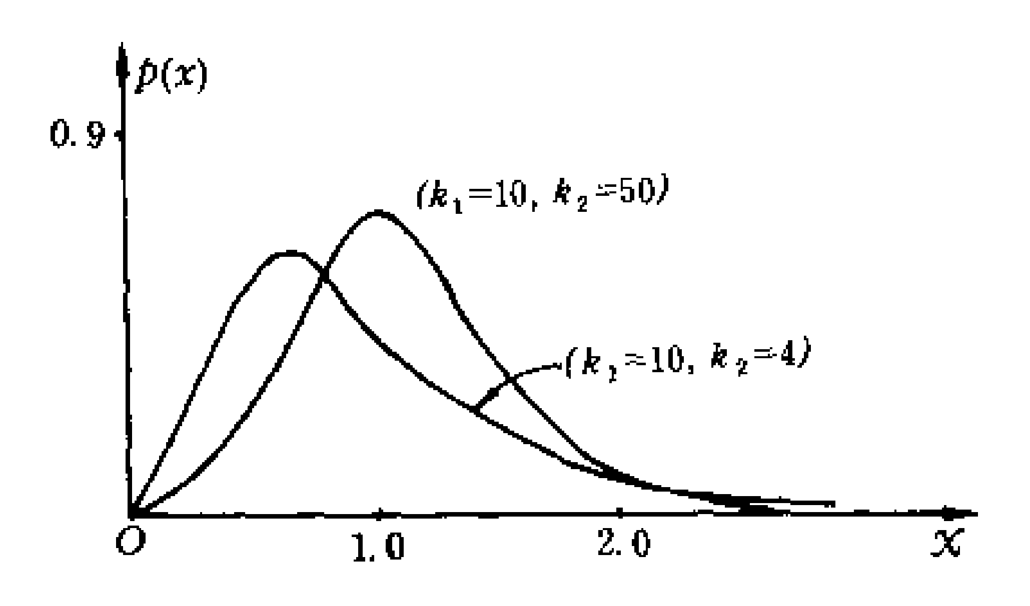



图 1.5　具有自由度为 $(k_1, k_2)$ 的 $F$-分布密度函数

## 1.4　多维随机变量及其分布.

在现实生活中许多随机现象用一维随机变量来描述是不够的. 如调查分析学生的健康状况，如果仅调查和量测学生的身高显然是不够的，还应调查学生的体重、血压、脉膊等等指标. 又如：研究气象的变化只记录温度（用 $\xi_1$ 表示）还不够，比如还应记录气压（$\xi_2$）和湿度（$\xi_3$）等等. 这样我们一次气象观测记录，就得 3 项指标，它是多维随机向量

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3).$$

如果我们考虑的是 $n$ 个随机变量组成的随机向量

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n),$$

它们的一次实验对应于 $n$ 维欧氏空间中的一个点（$\xi_1$，$\xi_2$，$\cdots$，$\xi_n$）$\in R^{(n)}$.

如果存在一个 $n$ 元非负可积函数 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 使得对任意的（$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n$）$\in R^{(n)}$，有

$$P\{\xi_1 < a_1, \xi_2 < a_2, \cdots, \xi_n < a_n\}$$

$$= \int_{-\infty}^{a_1}\int_{-\infty}^{a_2}\cdots\int_{-\infty}^{a_n} p(x_1, x_2, \cdots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n. \tag{1.39}$$

(1.39) 式表示会发生 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 出现在

$$\{-\infty < \xi_1 < a_1, -\infty < \xi_2 < a_2, \cdots, -\infty < \xi_n < a_n\}$$

范围内的概率为 $p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在上述区域上的积分.

上述类型的随机变量我们称为 $n$ 维连续型的随机变量，$p(x_1, \cdots, x_n)$ 称为向量 $\underline{\xi}$ 的概率密度函数.

最重要的 $n$ 维概率密度是 $n$ 维正态概率密度. 称 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是遵从 $n$ 维正态分布 $N(\underline{a}, \Sigma)$ 的，如果它的概率密度函数具有形式为：

$$p(\underline{x}) = p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$= (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \frac{1}{(\det\Sigma)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{1}{2}(\underline{x} - \underline{a})' \Sigma^{-1} (\underline{x} - \underline{a})\right\} \tag{1.40}$$

其中 $-\infty < x_i < +\infty$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$\underline{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$ 为 $n$ 维实数向量；$\Sigma$ 是正定对称矩阵；$\Sigma^{-1}$ 为其逆矩阵，其中 $(\quad)'$ 代表转置.

$N(\underline{a}, \Sigma)$ 在 $n=2$ 情况下，(1.40)对应的图象如图1.6所示.

当 $n=2$ 条件下，(1.40)可以具体地写成

$$p(x_1, x_2) =$$

$$\frac{1}{(2\pi)\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left\{\left(\frac{x_1 - a_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\left(\frac{x_1 - a_1}{\sigma_1}\right)\left(\frac{x_2 - a_2}{\sigma_2}\right) + \left(\frac{x_2 - a_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}} \tag{1.41}$$

其中 $-\infty < x_1 < +\infty$，$-\infty < x_2 < +\infty$，$\sigma_1, \sigma_2 > 0$，$0 < |\rho| < 1$. 对应于(1.40)，相应的参数为

$$\underline{a} = (a_1, a_2) \tag{1.42}$$

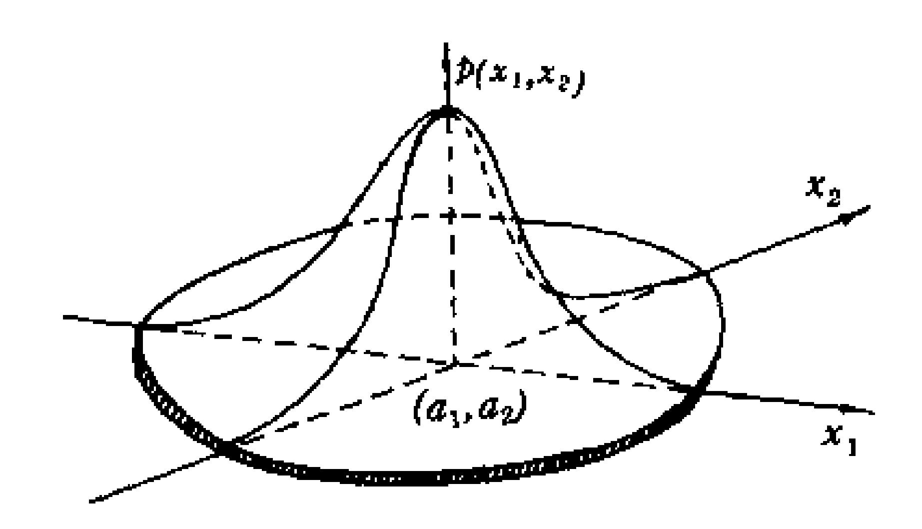



图 1.6 二维正态概率密度的图形

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}, \tag{1.43}$$

$$\sum^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho^2)} & -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} \\ -\frac{\rho}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho^2)} & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho^2)} \end{pmatrix}. \tag{1.44}$$

关于各参数的实际意义我们将在§2的数字表征中加以说明.

不难看出,当(1.41)中的 $\rho=0$ 时,则变为

$$p(x_1,x_2) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} e^{-\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{x_1-a_1}{\sigma_1}\right)^2+\left(\frac{x_2-a_2}{\sigma_2}\right)^2\right\}}$$

$$= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}\right]\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}\right] \tag{1.45}$$

$$= p_1(x_1)\cdot p_2(x_2). \tag{1.46}$$

其中 $$p_1(x_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} e^{-\frac{(x_1-a_1)^2}{2\sigma_1^2}}, \quad -\infty < x_1 < +\infty. \tag{1.47}$$

$$p_2(x_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} e^{-\frac{(x_2-a_2)^2}{2\sigma_2^2}}, -\infty < x_2 < +\infty. \tag{1.48}$$

对照(1.27)一维正态分布密度不难看出，(1.47)对应于$N(a_1, \sigma_1^2)$而(1.48)对应于$N(a_2, \sigma_2^2)$的二个一维正态分布密度. 由此表明，二维正态分布(1.41)中若$\rho=0$，则它可以表示为二个一维正态概率密度的乘积. 不难看出，此时(1.47)是对应于

$$\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2) \tag{1.49}$$

中的第一个正态随机变量$\xi_1$的密度；而（1.48）是对应于第二个$\xi_2$变量的密度函数的. 由此表明：二个联合的随机向量$\underline{\xi}=(\xi_1, \xi_2)$的正态分布密度（二维），当$\rho=0$时可以由每一个分量的概率密度乘积而得. 粗略地说：即掌握二个因素的联合规律，只需掌握各个因素的规律即可，这表明这二个因素彼此之间没有相互作用，或说是彼此无关的、独立的. 由此引出：

**定义 1.3**（独立性） 设$p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$为$n$维随机变量$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$的联合密度，而$p_i(x_i)$为$\xi_i$的一维概率密度，$i=1, 2, \cdots, n$. 如果有

$$p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = p_1(x_1)p_2(x_2), \cdots, p_n(x_n) \tag{1.50}$$

对一切$-\infty < x_i < +\infty$，$i=1, 2, \cdots, n$成立，则称$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n$为$n$个相互独立的随机变量. 进一步地，如果$\xi_i$的分布函数都是相同的形式，则称$(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$是$n$个相互独立同分布的随机变量.

例如，$\xi_1$和$\xi_2$都是遵从$N(0, 1)$的变量，$(\xi_1, \xi_2)$的联合密度为

$$p(x_1,x_2)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{1}{2}(x_1^2+x_2^2)},$$
$$-\infty<x_1<+\infty,\ -\infty<x_2<+\infty,\tag{1.51}$$

则 $\xi_1$，$\xi_2$ 是二个独立同 $N(0,1)$ 分布的随机变量.

# §2 随机变量的数字特征

本节将介绍刻划随机变量统计特性的数字特征. 我们在上二节中已看到：刻划随机变量的统计规律性的最好手段是用概率分布函数. 然而如何去表达具体的函数，即选择 $p(x)$ 或 $p(x_1,\cdots,x_n)$ 并不很容易. 在许多场合，人们对随机变量变化规律并不企望能掌握一切可能的随机事件的概率 $P\{\xi\in E\}$，而只希望能用一些确定的数字来刻划它的特性. 比如，对于随机变化的数据，人们常用平均值

$$\overline{X}=\frac{1}{N}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$$

作为对数据变化水平的认识.

## 2.1 数学期望（平均值）.

对随机变量的变化的认识就是求它的平均值，即称为数学期望.

**定义 1.4**（均值） 设 $\xi$ 是离散型的随机变量，它的分布为

$$\xi\sim\begin{pmatrix}0, & 1, & 2, & \cdots, & n & \cdots\\ P_0, & P_1, & P_2, & \cdots, & P_n & \cdots\end{pmatrix},\tag{1.52}$$

其中 $P_k\geqslant 0$，$k=0,1,2,\cdots,n$，$\Sigma_k P_k=1$. 如果

$$\Sigma_k k P_k < +\infty, \tag{1.53}$$

则称
$$E[\xi] = \Sigma_k k P_k \tag{1.54}$$
为 $\xi$ 的数学期望，简称 $\xi$ 的均值.

例如：

(1) 二项分布

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ p, & q \end{pmatrix}, \tag{1.55}$$

则
$$E[\xi] = 1 \times p + 0 \times q = p. \tag{1.56}$$

(2) 贝努里分布

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, k = 0,1,2,\cdots,n. \tag{1.57}$$

则
$$\begin{aligned} E[\xi] &= \Sigma_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} \\ &= np \Sigma_{k=1}^n k \frac{n!}{k!\ (n-k)!} \frac{p^k}{np} q^{n-k} \\ &= np \Sigma_{k=1}^n \frac{(n-1)!}{(k-1)!\ (n-k)!} p^{k-1} q^{n-k} \\ &= np \Sigma_{j=0}^{n-1} C_{n-1}^j p^j q^{(n-1)-j}. \end{aligned} \tag{1.58}$$

(1.58) 的求和项正好代表了 $n-1$ 次贝努里实验的一切可能结果的概率，因而应该等于必然事件的概率，即等于 1. 由此可知 (1.58) 得

$$E[\xi] = np. \tag{1.59}$$

**定义 1.5**(均值)　设想 $\xi$ 是连续型的随机变量，它的密度函数为 $p(x)$，如果

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| p(x) dx < +\infty, \tag{1.60}$$

则称
$$E[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx \tag{1.61}$$

为 $\xi$ 的数学期望.

例如：

(1) 均匀 $U\ [a,\ b]$ 分布

不难算出

$$E[\xi]=\int_b^a x\cdot\frac{dx}{b-a}=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}(b^2-a^2)$$

$$=\frac{a+b}{2}. \tag{1.62}$$

(2) 正态分布 $N(a,\sigma^2)$.

根据分布密度

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty, \tag{1.63}$$

不难看出 $\int_{\infty}^{\infty}|x|p(x)dx<+\infty$ ,

其数学期望为

$$E[\xi]=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}xe^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}dx,\ 令\ u=\frac{x-a}{\sigma},$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(u\sigma+a)e^{-\frac{u^2}{2}}du$$

$$=\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}ue^{-\frac{u^2}{2}}du+a\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right) \tag{1.64}$$

$$=a\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{u^2}{2}}du\right) \tag{1.65}$$

$$=a. \tag{1.66}$$

其中(1.64)的第一项积分为奇函数积分，它等于零，而(1.65)括号为 $N(0,1)$ 密度的全程积分为必然事件的概率，它等于 1.

由 (1.66) 可知 $N\ (a,\ \sigma^2)$ 分布的第一个参数 $a$ 的意义是：

该随机变量的取值平均说来是$a$. 例如有甲、乙两地平均气温分别遵从 $N(10, \sigma^2)$ 和 $N(5, \sigma^2)$ 分布，于是我们可以判断乙地气温一般说来比甲地低.

## 2.2　方差(偏差)与协方差.

对随机变量的特征，如果只用平均值来刻划是很不够的. 例如有甲、乙两地气温年平均值都是 10℃，但如果甲地的气温全年比较平稳，起伏在 10℃以内；相反，乙地全年温度大起大落，起伏变化在 25℃. 很明显甲地的气候可能会比乙地舒服（当然气候好、坏还决定于许多因素）. 可见除了考查平均值以外还应考查偏离平均值的偏差的大小—这就是方差的概念.

**定义 1.6**（方差）　设 $\xi$ 是随机变量，$E[\xi^2] < +\infty$，则称

$$D(\xi) = E([\xi - a]^2) \tag{1.67}$$

为 $\xi$ 的方差，其中 $a = E[\xi]$是 $\xi$ 的平均值.

需说明的是（1.67）的含义是：

A. 当 $\xi$ 是离散型，其分布为

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_0, & x_1, & \cdots, & x_n, & \cdots \\ P_0, & P_1, & \cdots, & P_n, & \cdots \end{pmatrix}.$$

设想 $E[\xi] = \Sigma_k x_k P_k = a$，则定义

$$D[\xi] = \Sigma_k (x_k - a)^2 P_k. \tag{1.68}$$

类似地，如果 $\xi$ 是连续型的，密度为 $p(x)$，且记 $a = E[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} x p(x) dx$，则(1.67) 是

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - a)^2 p(x) dx. \tag{1.69}$$

由此可推想
$$E[\xi^2]=\begin{cases}\sum_k x_k^2 P_k, & \text{当 } \xi \text{ 为离散型;}\\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 p(x)dx, & \text{当 } \xi \text{ 为连续型.}\end{cases} \tag{1.70}$$

以下以常见的分布为例说明它们的方差：

1. 二点分布.

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ p, & q \end{pmatrix}, \quad q = 1 - p, \quad 1 > p > 0.$$

前已算出 $E[\xi]=p$，则

$$\begin{aligned} D[\xi] &= (1-p)^2 \cdot p + (0-p)^2 \cdot q \\ &= (1-2p+p^2)p + p^2(1-p) \\ &= p - 2p^2 + p^3 + p^2 - p^3 = p - p^2 = p(1-p) \\ &= pq. \end{aligned} \tag{1.71}$$

2. 贝努里分布.

$$P\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad k = 0,1,2,\cdots,n.$$

前已算出 $E[\xi]=np$，则不难算出

$$D[\xi] = npq. \tag{1.72$'$}$$

（证明留给读者）.

3. 正态 $N(a, \sigma^2)$ 分布.

其密度为

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}}, \; -\infty < x < +\infty. \tag{1.72}$$

前已算出

$$E[\xi] = a,$$

则
$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}(x-a)^2 e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}} dx. \tag{1.73}$$

令 $u=\left(\frac{x-a}{\sigma}\right)$，则 $du=\frac{1}{\sigma}dx$，(1.73) 可改写为

$$D[\xi] = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \cdot \sigma^2 \cdot e^{-\frac{u^2}{2}} du$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \left[ - ue^{-\frac{u^2}{2}} \Big|_{-\infty}^{\infty} + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right] \quad (1.74)$$

$$= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \cdot \sqrt{2\pi} = \sigma^2. \quad (1.75)$$

由（1.75）可见，$N$（$a$，$\sigma^2$）中第二个参数 $\sigma^2$ 原来就是方差一即平均偏离均值 $a$ 的离差．由图 1.3 可以看出 $\sigma$ 小则分布集中在 $a$，反之，$\sigma$ 大则分布很散，表明该随机变量变化起伏（离 $a$ 值）很大．

我们知道，正态分布 $N(a, \sigma^2)$ 的（1.27）中只依赖于二个参数 $a$ 和 $\sigma^2$；只要能确定这二个值，则它的密度函数完全决定了，即该随机变量的统计规律也完全可以把握住．在实际应用中，一组随机变量的观测值

$$x_1, x_2, \cdots, x_N \quad (1.76)$$

它的平均值 $E[\xi]$和方差 $D[\xi]$,可以用以下方法估计：

$$\overline{X} = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k \quad (1.77)$$

可用来估计 $E$ ［$\xi$］；

$$S^2 = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}(x_k - \overline{X})^2 \quad (1.78)$$

可以用来估计方差 $D[\xi]$．

理论上可以证明(1.77)和(1.78)都是 $E[\xi]$和 $D[\xi]$的很好的估计量(有的书用$\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(x_k-\overline{x})^2$ 来估计 $D[\xi]$,当 $N$ 大时二者无实质差别)．

## 2.3　多维随机变量的数字特征．

对多维随机变量（以二维为例）$\underline{\xi}$=（$\xi_1$，$\xi_2$）的统计规律

性的认识，也希望用一些确定数值来刻划.

**定义 1.7**（多维均值）设 $\underline{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ 是离散型的随机变量，它的分布为

$$P_{k,j}=P\{\xi_1=x_k;\xi_2=y_j\};(x_k,y_j)\in R^{(2)}, \quad (1.79)$$

即
$$0<P_{k,j}\leqslant 1; \quad (1.80)$$

$$\Sigma_k\Sigma_j P_{k,j}=1; \quad (1.81)$$

如果
$$\Sigma_k\Sigma_j|x_k|P_{k,j}<+\infty;$$
$$\Sigma_k\Sigma_j|y_j|P_{k,j}<+\infty, \quad (1.82)$$

则称 $\underline{a}=(a_1,a_2)$，其中

$$a_1=\Sigma_k\Sigma_j x_k P_{k,j}=E[\xi_1];$$
$$a_2=\Sigma_k\Sigma_j y_j P_{k,j}=E[\xi_2] \quad (1.83)$$

为 $\underline{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ 的均值向量.

**定义 1.8**（多维均值） 设 $p(x_1,x_2)$ 为 $\underline{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ 的概率密度函数，如果

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x_1|p(x_1,x_2)dx_1dx_2<+\infty, \quad (1.84)$$

并且 $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|x_2|p(x_1,x_2)dx_1dx_2<+\infty$,

则称 $\underline{a}=(a_1,a_2)$ 为 $\underline{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ 的均值向量，其中

$$E[\xi_i]=a_i=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}x_i p(x_1,x_2)dx_1dx_2,\ i=1,2. \quad (1.85)$$

例如，$\underline{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ 是二维正态分布 $N(\underline{a},\Sigma)$ 的随机向量，其联合密度 $p(x_1,x_2)$ 可表为(1.41)，$\underline{a}$ 和 $\Sigma$ 可具体写成(1.42)和(1.43). 则可以算出

$$E[\xi_1]=a_1;\quad E[\xi_2]=a_2. \quad (1.86)$$

多维随机变量也可以定义各分量的方差，然而和一维截然不同的是需要有一个数量指标能够刻划它们相互间的关系、所以在统计学上多用协方差阵 Σ 来描述多维随机变量的二阶特性. 以下为简明起见只讨论连续型的随机变量.

**定义 1.9**（协方差阵） 设 $\underset{\sim}{\xi}=(\xi_1, \xi_2)$ 为二维随机变量，如果 $D[\xi_i]<+\infty$，$i=1, 2$，令

$$\sigma_{ij}=E([\xi_i-E\xi_i][\xi_j-E\xi_j]),\ i,j=1,2, \qquad (1.87)$$

则称

$$\Sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix} \qquad (1.88)$$

为 $\underset{\sim}{\xi}$ 向量的协方差阵.

其中（1.87）理解为

$$\begin{aligned}\sigma_{11}&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-E\xi_1)^2 p(x_1,x_2)dx_1dx_2\\&=E[\xi_1-E\xi_1]^2\end{aligned} \qquad (1.89)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{22}&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_2-E\xi_2)^2 p(x_1,x_2)dx_1dx_2\\&=E[\xi_2-E\xi_2]^2\end{aligned} \qquad (1.90)$$

$$\begin{aligned}\sigma_{12}&=\sigma_{21}\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(x_1-E\xi_1)(x_2-E\xi_2)p(x_1,x_2)dx_1dx_2\\&=E([\xi_1-E\xi_1][\xi_2-E\xi_2]).\end{aligned} \qquad (1.91)$$

而 $p(x_1,x_2)$ 为 $\underset{\sim}{\xi}=(\xi_1,\xi_2)$ 的联合密度.

例如二维正态密度 $N(\underset{\sim}{a},\Sigma)$（见(1.41)），则

$$\sigma_{11}=D[\xi_1],\quad \sigma_{22}=D[\xi_2],$$

$$\sigma_{12}=\sigma_{21}=\rho\sigma_1\sigma_2. \qquad (1.92)$$

**定理 1.10**（相关系数） 称

$$\rho=\frac{\sigma_{12}}{\sqrt{\sigma_{11}}\sqrt{\sigma_{22}}} \tag{1.93}$$

为 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 的相关系数.

$\rho$ 的大小是刻划（$\xi_1$，$\xi_2$）之间相互依赖程度，数学上有以下定理：

**定理 1.1**（相关系数） 设 $\xi_1, \xi_2$ 为二个随机变量，$D[\xi_1]$，$D[\xi_2]$ 皆不为零，$\rho$ 为相关系数，则

（1）$0\leqslant|\rho|\leqslant 1$； (1.94)

（2）$\rho=1$ 的充分必要条件是 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 有线性相关性 $\xi_2=\alpha\xi_1+\beta$，$\alpha\neq 0$， (1.95)

（3）若（$\xi_1$，$\xi_2$）是二维正态变量，则

$\rho=0$ 的充分必要条件是 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 相互独立.

由本定理可知，$|\rho|$ 值小表明 $\xi_1$ 和 $\xi_2$ 相关性小；反之 $|\rho|$ 愈接近于 1 其相关性愈强. $\rho=1$ 时（1.95）中 $\alpha>0$，即二变量是正相关的；$\rho=-1$，$\alpha<0$ 表明二者是负相关的. 在观测值 $\xi_1=x$，$\xi_2=y$，将（$x$，$y$）画于平面上，可以用图 1.7、1.8 和 1.9 来表示它们的相关性和 $\rho$ 的大概情形.

在应用中，设对（$\xi_1$，$\xi_2$）分别观测到 $n$ 个样

$(x_{11}, x_{21})$，$(x_{12}, x_{22})$，…，$(x_{1n}, x_{2n})$， (1.96)

则先求 $E[\xi_1]$ 和 $E[\xi_2]$ 的估计值

$$\bar{\xi}_1=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_{1i}；\ \bar{\xi}_2=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}x_{2j}， \tag{1.97}$$

$D[\xi_1]=\sigma_{11}$和 $D[\xi_2]=\sigma_{22}$可用

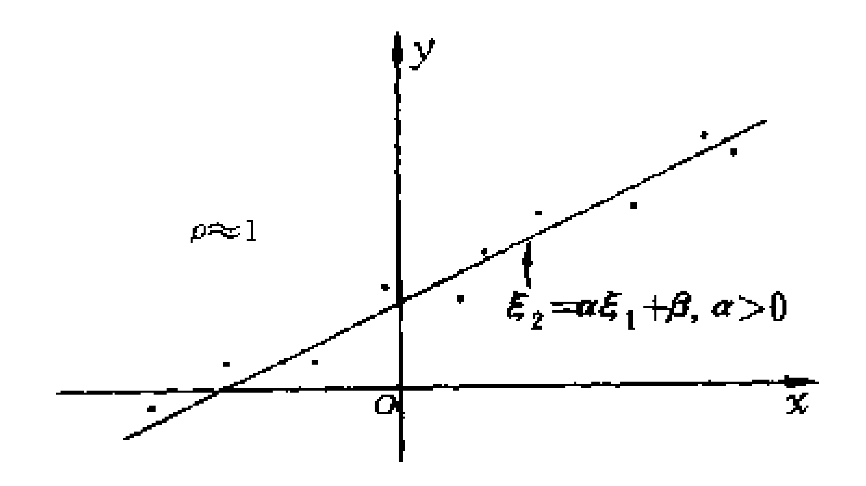



图 1.7　ρ 接近于 1 的二个变量的观测点的平面图形

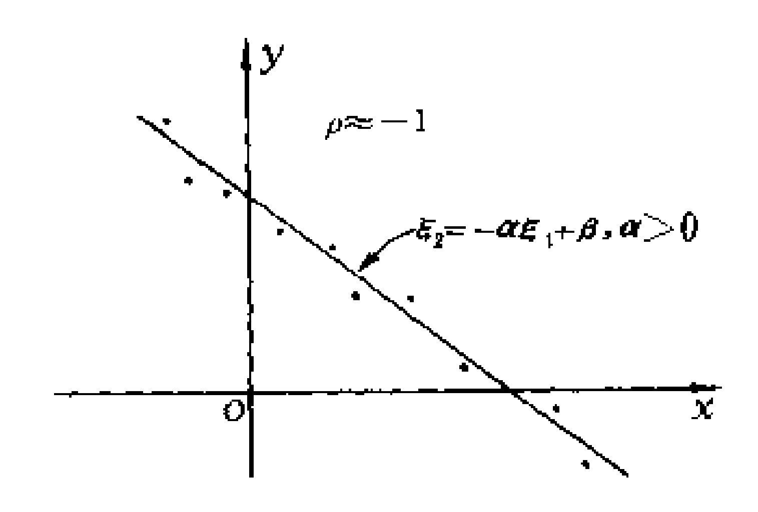



图 1.8　ρ 接近于 −1 的二个变量的观测点的平面图形

$$S_{11} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{1j} - \bar{\xi}_1)^2,$$

$$S_{22} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{2j} - \bar{\xi}_2)^2 \qquad (1.98)$$

来估计，而

$$S_{12} = S_{21} = \frac{1}{n}\sum_{j}(x_{1j} - \bar{\xi}_1)(x_{2j} - \bar{\xi}_2)$$

可用来估计 $\sigma_{12}$和 $\sigma_{21}$. 由以上各式可得协方差阵 Σ 的估计值为

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} \quad (1.99)$$

并由此求出 $S^{-1}$. 于是从(1.96) $n$ 对观测样本出发，在正态分布条件下就可以用

$$(\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2), S, S^{-1}$$

来求出二维密度 $p(x_1, x_2)$（见(1.41) 式). 于是任一 $\{(\xi_1, \xi_2) \in E_2\}$ 的随机事件的概率都可以求出

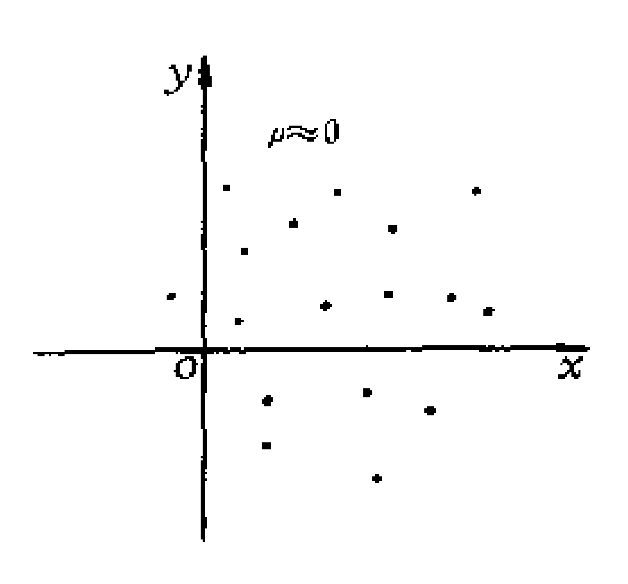



图 1.9 $\rho$ 接近于 0 的观测点平面图

$$P\{(\xi_1, \xi_2) \in E_2\} = \iint_{E_2} p(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (1.100)$$

至于一般 $n$ 维随机变量 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，它的协方差阵

$$\sum = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn} \end{bmatrix} \quad (1.101)$$

中的各元素亦可类似于定义 1.9 给出：

设 $E\xi_i$, $i=1, 2, \cdots, n$ 为 $\xi_i$ 的均值，则 (1.101) 中

$$\sigma_{k,j} = E([\xi_k - E\xi_k][\xi_j - E\xi_j]), \quad (1.102)$$

$$(k, j = 1, 2, \cdots, n).$$

并且 $\sigma_{k,k} = D[\xi_k]$ 为 $\xi_k$, $k=1, 2, \cdots, n$ 的方差.

相应地也可以定义 $\xi_k$ 和 $\xi_l$ $(k \neq l)$ 的相关系数

$$\rho_{k,l} = \frac{\sigma_{k,l}}{\sqrt{\sigma_{kk}}\sqrt{\sigma_{ll}}}$$

$$= \sigma_{k,l} / \sqrt{D[\xi_k]} \cdot \sqrt{D[\xi_l]},$$

$$k \neq l, k, \quad k, l = 1, 2, \cdots, n, \tag{1.103}$$

它刻划了变量 $\xi_k$ 和 $\xi_l$ 之间的相关性. 定理 1.1 的结果对 $\rho_{k,l}$同样有效，$k \neq l$，$k$，$l=1$，2，…，$n$.

# §3 时间序列分析

## 3.1 平稳时间序列.

在许多科技工作中所遇到的随机变量不仅是多维的，甚至是无穷多维的. 例如：对太阳黑子数（每年观测计总数）的记录，年年可进行，每年都不能预料，而且在人类出现以前，太阳黑子数的变化同样存在. 用随机变量表示黑子数，则它是依赖于时间(年）的序列

$$\cdots \xi_{-n}, \xi_{-n+1}, \cdots, \xi_3, \xi_2, \xi_1, \xi_0, \cdots; \tag{1.104}$$

每固定一个足标(年)，黑子数是随机变量.

又例如：将每天股市的收盘价记录下来亦可得无穷多天（个）的股市价格

$$\xi_0, \xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n, \cdots. \tag{1.104}'$$

(1.104）或（1.104)′形式的随机序列我们称为时间序列.

在时间序列中，有一类首先引起经济学家、电气工程师和数学家注意的是称为“平稳时间序列”类，它的定义如下：

**定义 1.11**（平稳序列） 设 $\xi_t$，$t=0$，$\pm1$，$\pm2$，…是时间序列，$D[\xi_t] < +\infty$，$t \in \mathbf{Z}$（整数集）. 如果以下二个条件能成立：

1. $E[\xi_t] = a, \forall\, t \in \mathbf{Z}$; $\quad$ (1.105)

2. 对$\forall$ $t$、$\tau\in\mathbf{Z}$，

$$R(t,\tau)=E[\xi_{t+\tau}-a][\xi_t-a]=R(\tau)\text{，与 } t \text{ 无关，} \qquad (1.106)$$

则称 $\xi_t$ 为平稳时间序列，或简称平稳列. $a$ 称为 $\xi_t$ 的均值；$R(\tau)$ 称为 $\xi_t$ 的协方差函数或相关函数.

(1.105)的含义是：$\xi_t$，当 $t$ 变化时它的均值 $E[\xi_t]$是不依赖于 $t$，即是一固定常数. (1.106)的含义是：为便于解释不妨假定 $D[\xi_t]=\sigma^2=1$ 与 $t$ 无关，则由(1.103)知(此时 $D[\xi_t]=1=\sigma_{t,t}=\sigma_{t+\tau,t+\tau}$)

$$R(\tau)=\frac{\sigma_{t+\tau,t}}{\sqrt{\sigma_{t+\tau,t+\tau}}\sqrt{\sigma_{t,t}}}=\rho_{t+\tau,t} \qquad (1.107)$$

与 $t$ 无关. 即该平稳列的一大特点是：任意二个时刻 $t+\tau$ 与 $t$ 对应的随机变量的相关性（相互依赖程度）只依赖于二者之间隔 $\tau$ 而与起始点 $t$ 无关（参看图 1.10).

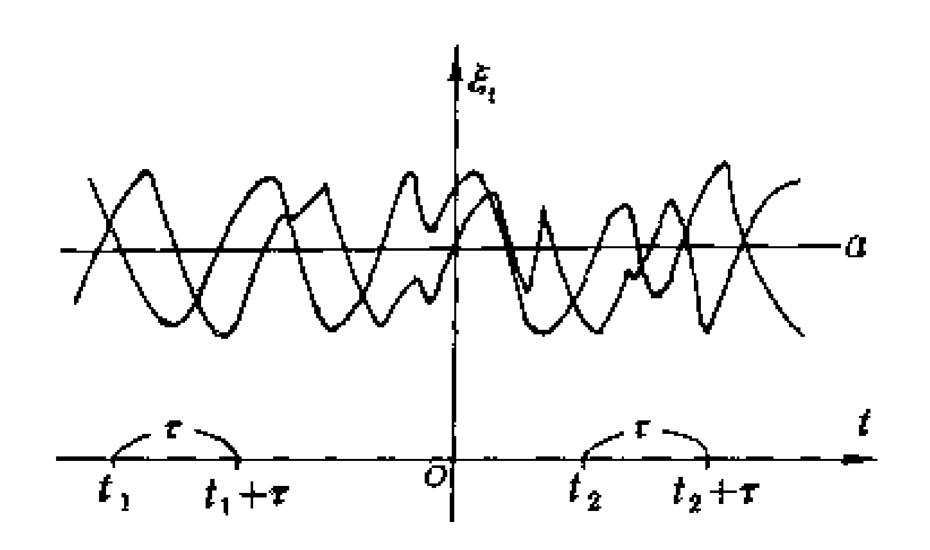



图 1.10 平稳序列的均值 $a$ 是一常数 $(\xi_{t_1},\ \xi_{t_1+\tau})$ 与 $(\xi_{t_2},\ \xi_{t_2+\tau})$ 具有相同的相关性

在应用中，假设 $\xi_t$ 是平稳列（平稳性往往由许多物理的、工程的实际背景可以判定），对 $\xi_t$ 的观测得记录

$$x_1, x_2, \cdots, x_N,$$

只要 $N$ 比较大，则 $a$ 和 $R(\tau)$ 分别可用以下二式来估计

$$\hat{a}_N = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} x_k; \tag{1.108}$$

$$\hat{R}_N(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-\tau}(x_k - a_N)(x_{k+\tau} - a_N). \tag{1.109}$$

其中 $\tau=0, 1, 2, \cdots, m_N$; $m_N << N$，例如 $m_N = [\sqrt{N}]$（取整数）等等. 数学上可以证明 $\hat{a}_N$ 和 $\hat{R}_N(\tau)$ 在一定条件下都是 $a$ 和 $R(\tau)$ 的很好的估计.

如果 $\xi_t$，$t \in \mathbf{Z}$ 是相互独立并且具有相同分布的序列（如 $N(0, \sigma^2)$），则

1. $E[\xi_t]=a$,（同分布）；
2. $R(t,\tau)=E[\xi_{t+\tau}-a][\xi_t-a]$
   $=E[\xi_{t+\tau}\xi_t]-a^2$.

当 $\tau \neq 0, R(t,\tau)=E[\xi_{t+\tau}]E[\xi_t]-a^2 \quad (1.110)$

$=a \times a - a^2 = 0; \quad (1.111)$

当 $\tau=0, R(t,\tau)=E[\xi_t^2]-a^2 \quad (1.112)$

$=E[\xi_t - a]^2 = D[\xi_t] = \sigma^2. \quad (1.113)$

由(1.111)和(1.113)看 $R(t,\tau)$的值与 $t$ 无关. 因而表明相互独立同分布序列是平稳列.

需说明的是（1.110）的获得，利用了以下的事实，即当 $\xi$、$\eta$ 相互独立时

$$E[\xi \cdot \eta] = E[\xi] \cdot E[\eta]. \tag{1.114}$$

我们只在连续型随机变量来证明（1.114）. 设 $p(x, y)$ 为 $(\xi, \eta)$ 的联合密度；$p_\xi(x)$，$p_\eta(y)$ 分别为 $\xi$ 和 $\eta$ 的密度，由独立性的定义 1.3 知

$$p(x,y) = p_\xi(x) \cdot p_\eta(y).$$

于是由（1.91）知

$$E[\xi\eta]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp(x,y)dxdy=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}xyp_\xi(x)\cdot p_\eta(y)dxdy$$

$$=\left(\int_{-\infty}^{\infty}xp_\xi(x)dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty}yp_\eta(y)dy\right)$$

$$=E[\xi]E[\eta].$$

## 3.2 时间序列的 AR 模型

在日常生活、经济现象、自然界与工程技术中广泛存在的一种平稳序列称为自回归模型，通常称为 AR 模型（AR 分别为英文 Auto-Regression 的头二个字母）.

**定义 1.12** （AR（$p$））  设 $\xi_t$，$t\in\mathbf{Z}$ 是平稳列，它满足以下的差分方程

$$\xi_t=\varphi_1\xi_{t-1}+\varphi_2\xi_{t-2}+\cdots+\varphi_p\xi_{t-p}+\varepsilon_t, \qquad (1.115)$$

其中 $\varphi_p\neq0$，$\varepsilon_t$ 为相互独立同分布的随机变量序列，$E\varepsilon_t=0$，$E\varepsilon_t^2=\sigma^2<+\infty$①. 令

$$\Phi(z)=1-\varphi_1z-\varphi_2z^2-\cdots-\varphi_pz^p, \qquad (1.116)$$

则它是 $p$ 阶实系数的多项式，它的所有的根都在单位圆外，即

$$\Phi(z)\neq0, |z|\leqslant1, \qquad (1.117)$$

则称 $\xi_t$ 是一个 AR（$p$）模型.

AR($p$) 模型的实际意义如下：

设想 $\sigma^2$ 很小，则（1.115）式表明 $t$ 时刻 $\xi_t$ 的值可以由前 $p$ 个时刻的（$\xi_{t-1}$，$\xi_{t-2}$，…，$\xi_{t-p}$）向量值组合而成（但受 $\varepsilon_t$ 的小

---

① 工程上称这种序列为白噪声列. 如果 $\sigma^2=1$ 则称为标准白噪声列.

扰动)，这就是自回归的含义．由此看出：要了解未来 $\xi_t$，只需用历史上已有的资料 $\xi_{t-1}, \xi_{t-2}, \cdots, \xi_{t-p}$的 $p$ 个观测值就可以大致把握住 $\xi_t$ 的变化数量．

特别地，当 $p=1$，AR($p$) 模型是指满足以下方程的平稳序列

$$\xi_t = \varphi_1 \xi_{t-1} + \varepsilon_t, \tag{1.118}$$

为满足（1.117)，此时需且只需

$$|\varphi_1| < 1, \tag{1.119}$$

$\varepsilon_t$ 是白噪声序列．这种序列称为平稳马氏序列（Markov Sequence)，它有一重要特点，即：对未来 $\xi_{t_0+\tau}$（$\tau>0$）的值的最好预测只依赖于当前值 $\xi_{t_0}$而与历史 $\xi_{t_0-l}$（$l>0$）无关．

不难求出 AR（1）（1.118）对应的相关函数（1.106）

$$R(\tau) = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1^2}(\varphi_1)^{|\tau|}, \tau = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{1.120}$$

其中

$$\sigma_\varepsilon = E\varepsilon_t^2, \quad E\varepsilon_t \equiv 0. \tag{1.121}$$

为以后方便，时序研究中，对平稳列大都假定义 $E\xi_t \equiv a = 0$．因为如果 $a \neq 0$，则

令 $$\tilde{\xi}_t = \xi_t - a, \tag{1.122}$$

（相当于图 1.10 中将 $t$ 横座标向上移动至 $a$ 线)，显然 $E\tilde{\xi}_t = 0$，然而由（1.118）

$$\begin{aligned} R_{\tilde{\xi}}(\tau) = E[\tilde{\xi}_{t+\tau}\tilde{\xi}_t] &= E[\xi_{t+\tau} - a][\xi_t - a] \\ &= R_\xi(\tau), \end{aligned} \tag{1.123}$$

表明 $\xi_t$ 和 $\tilde{\xi}_t$ 有相同的相关函数.

### 3.3 时间序列的谱密度函数.

在时间序列分析中，除了相关函数 $R(\tau)$是非常重要的概念

之外，还有一个在数学上与之等价的重要概念，这就是谱密度函数.

**定义 1.13**（谱密度） 设 $\xi_t$ 是平稳列*，它的相关函数 $R(\tau)$（见（1.106））是绝对可和的

$$\Sigma_\tau |R(\tau)| < +\infty, \qquad (1.124)$$

则称

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\Sigma_\tau R(\tau)e^{-i\tau\lambda}, \ -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi \qquad (1.125)$$

为 $\xi_t$ 的谱密度函数.

$f(\lambda)$ 相当于以 $R(\tau)$ 为系数的 Fourier 级数，故有

$$R(\tau) = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)e^{i\tau\lambda}d\lambda. \qquad (1.126)$$

特别当 $\tau=0$

$$R(0) = E[\xi_t]^2 = D[\xi_t], \qquad (1.127)$$

则有

$$D[\xi_t] = \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda)d\lambda. \qquad (1.128)$$

设想 $\lambda=2\pi f$ 是角频率或圆频率，则（1.128）表示 $f(\lambda)$ 图形下的面积代表了 $\xi_t$ 的“平均功率”，从而 $f(\lambda)$ 集中的地方就代表了 $\xi_t$ 的主要频率成分或谐波分量（参看图 1.10）—设 $\xi_t$ 的连续曲线是某一振动过程的记录，而 $f(\lambda)$ 如图 1.11，则表明该振动有一个明显的以 $\lambda_0$ 为频率的周期振动（谐波）成分.

由（1.125）及 $R(\tau)=R(-\tau)$（读者由（1.106）的定义证明），则

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\left\{R(0) + 2\sum_{k=1}^{\infty}R(k)\cos k\lambda\right\}, \qquad (1.129)$$

---

* 如前指出我们假定 $E\xi_t=0$，$\forall\, t\in \mathbf{Z}$.

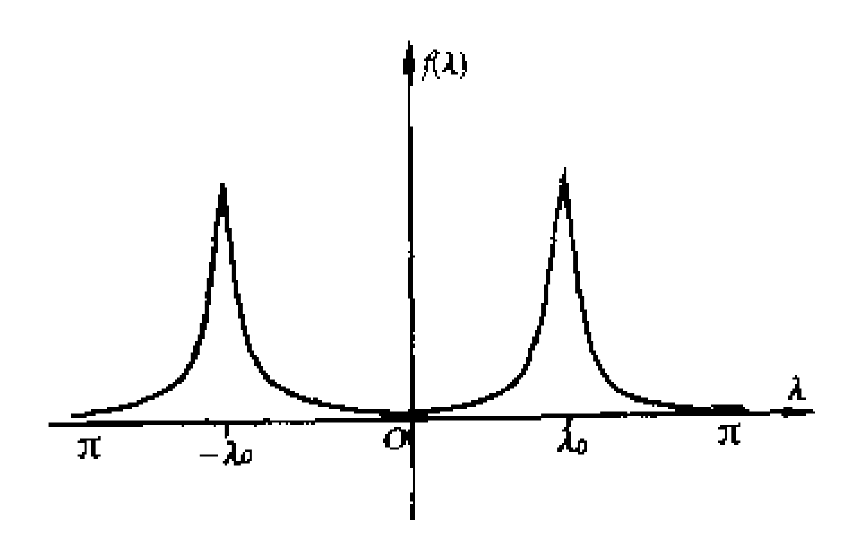



图 1.11　本图显示 $\xi_t$ 具有以 $\lambda_0$ 为频率的谐波成分

因而有
$$f(-\lambda)=f(\lambda),\quad -\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi, \tag{1.130}$$
从而图 1.10 会出现二个对称的峰.

当 $\xi_t$ 是 AR(1)模型(1.118)时，它的相关函数可表为
$$R(\tau)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{1-\varphi_1^2}(\varphi_1)^\tau,\tau=0,\pm1,\pm2,\cdots, \tag{1.131}$$
则它的谱密度为
$$f(\lambda)=\frac{\sigma_\varepsilon^2}{2\pi}\Big/|1-\varphi_1 e^{-i\lambda}|^2,-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi, \tag{1.132}$$
它是以 $R(\tau)$ 为系数的 Fourier 级数求和而得的. 其图形一般如图 1.12 所示(其图形只相当于 $f(\lambda)$的正部).

又如 $\xi_t$ 为白噪声列，则
$$R(\tau)=\begin{cases}\sigma_\xi^2, & \tau=0,\\ 0, & \tau\neq0.\end{cases} \tag{1.133}$$
其中 $\sigma_\xi^2=R(0)=D[\xi_t]$，则由(1.129)看
$$f(\lambda)=\frac{\sigma_\xi^2}{2\pi},-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi, \tag{1.134}$$
即 $f(\lambda)=\text{Const}$，其图形如图 1.13 所示.

一般的 AR($p$) 模型(1.115)，其相关函数比较复杂，可以

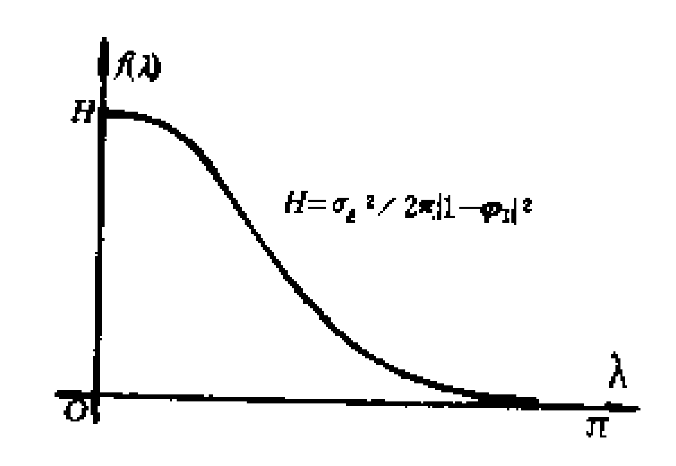



图 1.12 自回归 AR (1) 的谱密度图，负部与之对称，$0<|\varphi_1|<1$.

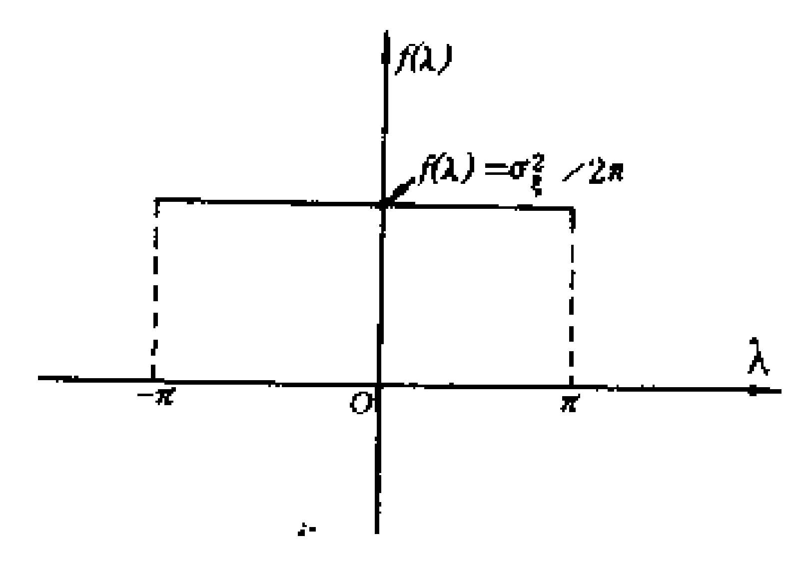



图 1.13 当 $\xi_t$ 是白噪声时其谱密度在谱域上为一个常数 $\sigma_\xi^2/2\pi$.

证明（见［14］），它的谱密度可表为

$$f(\lambda)=\frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\bigg/\left|1-\sum_{k=1}^{p}\varphi_k e^{-ik\lambda}\right|^2,\ -\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi, \tag{1.135}$$

而

$$R(\tau)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sigma_\xi^2}{2\pi}\frac{e^{i\tau\lambda}d\lambda}{\left|1-\sum_{k=1}^{p}\varphi_k e^{-ik\lambda}\right|^2},\ \tau=0,1,2,\cdots \tag{1.136}$$

## §4　统计的假设检验

### 4.1　统计学中的若干术语.

1. 总体.

我们把研究对象的某项指标（或多个指标）的全体称为总体，比如：对某产品的寿命进行研究，则该产品寿命的一切可能取值的全体就是一个总体；又如北京气温十月份的平均值的一切可能值的全体也是一个总体，等等. 为了数学上的研究，我们总假定总体具有确定的概率分布，比如平均气温的总体遵从 $N(a,\sigma^2)$ 分布等.

2. 随机样本.

统计学的研究特点就是从样本的分析入手. 样本抽取的结果事先是无法预料的，因而理解为是随机变量；为了使样本能反映总体的特性，我们假定该随机变量具有与总体相同的分布，而且样本的抽取应是彼此独立的. 简而言之，一串样本 $x_1$，$x_2$，…，$x_N$ 在数学上理解为是 $N$ 个相互独立同总体分布的随机变量.

3. 统计量.

不包含任何未知参数的样本的函数称为统计量. 例如 $\xi_1$，$\xi_2$，…，$\xi_N$ 为样本，则

$$\bar{\xi}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}a_i\xi_i \quad (a_i \text{ 为给定的系数})；$$

$$S^2=\frac{1}{N-1}\sum_{k=1}^{N}(\xi_k-\bar{\xi})^2 \tag{1.137}$$

皆为统计量.

在取样过程中为了保证随机性与独立性，最好是用随机数表来选择.

随机数表是由 0～9 十个数字随机排列而成的，本书后附了一张随机数表可供抽样时使用. 举一个产品抽查的例子说明.

设想车间总数有 5 个，每天各车间产品为 80 件，如今抽查总数为 20 件产品来检验. 办法有二个，一是各车间都要查，每车间查 4 件；另一种是不受车间的限定. 第一种办法是：将每车间的产品标上 01、02、03、…、80 的号码，对每一个车间，从随机数表上从左至右或从下到上，从任一点开始，两位两位的取数，如果该数大于 80 则弃之不用，再往下取. 每车间取 4 组二位数的号码，如

47， 03， (91)， 38， 76；

11， 68， 23， 09；

… … … …

38， 72， 43， 53.

第一组供第一车间抽取之用；…第五组供第五个车间抽取样本之用. 这样的抽查就比较随机和独立.

第二种抽查方案不规定车间，但总数还是 20 件. 其抽取方案是从数表中先取一个数，这个数应 $1\leqslant x_1\leqslant 5$，作为二维向量的第一个数，接着往下再抽取两位数 $1\leqslant x_2x_3\leqslant 80$，如

$$(3,\ 72)$$

代表抽查三车间第 72 号产品等等.

## 4.2 假设检验的基本思想.

统计学上往往对总体的某一性质（分布、参数等）通过样本来进行检验. 其方法是：先假设总体遵从某一分布，如果对照实测样本经过分析以后发现与假设有矛盾，则予以否认（对

该分布的假设)；反之则接受.

而所谓统计学上的“矛盾”是指：小概率事件原则上一次观测不应发生，如果发生了则它不会是小概率事件，再追究可能是由原假设（总体）不合理引起的.

例如：一口袋装有100个球，有人声称其中只有10个是红球，如今作随机的有放回的抽取，共5次，结果全是红球. 如何看待这一结果？一种是：红球的比例还是对的，5次抽取皆中红球是运气；另一种认为红球的比例不是$\frac{1}{10}$. 我们是这样分析的：

假设：红球占$\frac{1}{10}$.

检验手段：有放回抽取5次皆抽中红球，则其概率为（相当于独立抽取）

$$\xi_i \sim \begin{bmatrix} 1, & 0 \\ \frac{1}{10}, & \frac{9}{10} \end{bmatrix}, \quad i = 1,2,3,4,5. \tag{1.138}$$

$$\begin{aligned} & P\{\xi_1 = 1, \xi_2 = 1, \xi_3 = 1, \xi_4 = 1, \xi_5 = 1\} \\ & = \prod_{i=1}^{5} P\{\xi_i = 1\} = \left(\frac{1}{10}\right)^5 = 0.00001. \end{aligned} \tag{1.139}$$

表明发生这种事的可能性不是没有，但小得很，十万个人中大概才会有1人有此运气，如今我们做一次实验就发生这种事件. 我们自然怀疑红球的比例数为$\frac{1}{10}$的假设，因而是不可接受的.

统计学上的一般检验方法是：

1. 根据问题的要求，设立一个假设$H_0$，取它的对立假设为$H_1$.

2. 在$H_0$下，选一个样本函数（统计量），

$$S(x_1, x_2, \cdots, x_n),$$

其中 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 为随机样本，$S$ 的统计分布是已知的.

3. 选一个检验水平 $\alpha$（小概率值，如 0.001、0.01 或 0.05 等），以及某一个区域 $R_\alpha$，使得

$$P\{S \in R_\alpha\} = \alpha. \tag{1.140}$$

4. 由实测样本算出 $S$ 值，若落入 $R_\alpha$ 则否定原假设而接受 $H_1$. 反之，可考虑接受 $H_0$.

统计学上 $H_0$ 称为原假设，$H_1$ 称为对立假设，$\alpha$ 称为检验水平，$R_\alpha$ 称为否定域.

统计学上针对不同的问题进行不同的假设检验，即设立不同的 $H_0$，从而要选择不同的统计量 $\zeta$. 许多问题最后寻找 (1.140) 的 $R_\alpha$ 可借助于现有的许多统计表（如 $N(0, 1)$，$\chi_n^2$，$F(n,m)$ 分布表）.

# 第二章　线性系统的基本知识

## §1　线性系统及其数学刻画

### 1.1　什么是线性系统.

我们先看一个无线电电子学中常见的 $RC$ 滤波电路（见图 2.1）.

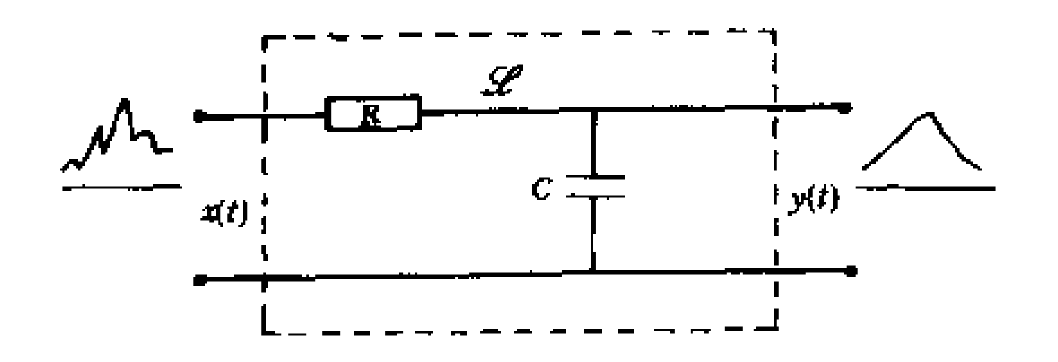



图 2.1　一个由 $RC$ 组成的低通滤波器 $\mathscr{L}$

电学中该电路所能起的作用是"低通滤波"，即将 $x_t$ 中所具有的相对高频的成分"滤掉"而保留比较缓变的成分—如图中所示，$y_t$ 比 $x_t$ 要光滑，"毛刺"被滤掉了. $\mathscr{L}$ 我们称之为一个系统.

一个系统 $\mathscr{L}$ 我们称它是定参数的线性系统，如果输入

$x(t)$ 输出是 $y(t)$，则输入 $x(t+\tau)$ 其输出应是 $y(t+\tau)$；此外，若输入是 $x_i(t)$，$i=1, 2$，输出是 $y_i(t)$，则当输入为

$$x(t) = \alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t) \tag{2.1}$$

时，其输出

$$y(t) = \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t), \tag{2.2}$$

其中 $\alpha_1$、$\alpha_2$ 为任意常(实)数.

(2.2) 的另一写法是

$$\begin{aligned}\mathscr{L}[x(t)] &= \mathscr{L}[\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)] \\ &= \alpha_1 \mathscr{L}[x_1(t)] + \alpha_2 \mathscr{L}[x_2(t)].\end{aligned} \tag{2.3}$$

视 $\mathscr{L}$ 为一算子，则 (2.3) 表明 $\mathscr{L}$ 是线性算子.

上述图 2.1 所示的低通滤波器就是一个定参数的线性系统. 以后我们讨论的系统也假定是不带能源的.

## 1.2 线性系统的 FRF 与 IRF 特性.

设想我们输入于一个定常数的线性系统（以下简称线性系统）$\mathscr{L}$ 的信号是

$$x(t) = e^{i\omega t}; \text{输出 } y(t) = Ae^{i\omega t}, \tag{2.4}$$

其中 $\omega$ 是一个实常数，则由 (2.4) 知

$$x(t+s) = e^{i\omega(t+s)} = e^{i\omega s} \cdot x(t). \tag{2.5}$$

对应地

$$\begin{aligned} y(t+s) &= Ae^{i\omega(t+s)} = Ae^{i\omega t} \cdot e^{i\omega s} \\ &= e^{i\omega s} y(t). \end{aligned} \tag{2.6}$$

如果输入是

$$x(t) = X(\omega) e^{i\omega t}, \tag{2.7}$$

其中 $X(\omega)$ 是与 $t$ 无关的复函数，则由 (2.4) 相应输出为

$$y(t) = AX(\omega) e^{i\omega t}, \tag{2.8}$$

记为

$$y(t) = Y(\omega)e^{i\omega t}. \tag{2.9}$$

因此可得输入（2.7）的"复振幅"$X(\omega)$和输出(2.9)的"复振幅"$Y(\omega)$的比值

$$\frac{Y(\omega)}{X(\omega)} = H(\omega) \tag{2.10}$$

是一个不依赖于 $t$ 而依赖于 $\omega$ 的复函数，称为该系统的"频率响应函数"或 FRF*.

例如：利用电学知识不难求出，图 2.1$RC$ 低通滤波器所对应的

$$H(\omega) = \frac{1}{1 + i\omega RC}, \tag{2.11}$$

由（2.10）可得

$$Y(\omega) = H(\omega)X(\omega). \tag{2.12}$$

由（2.12）可以导出一般的定常线性系统 $\mathscr{L}$ 的 FRF 的定义：

设想对 $\mathscr{L}$ 输入一时间函数 $x(t)$，它的富氏变换为 $X(\omega)$，而输出为 $y(t)$，它的富氏变换为 $Y(\omega)$，
则称

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{X(\omega)} \tag{2.13}$$

为 $\mathscr{L}$ 的 FRF.

上述结果可以用以下的直观的叙述来说明：

设想输入于 $\mathscr{L}$ 是一个收敛的富氏级数

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a(n\omega_0)e^{in\omega_0 t}, \tag{2.14}$$

其中周期为

* FRF 是英文 Frequency Response Function 的简写.

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_0}, \tag{2.15}$$

系数为

$$\alpha(n\omega_0) = \frac{1}{T_0}\int_{-T_0/2}^{T_0/2} x(t)e^{-in\omega_0 t}dt. \tag{2.16}$$

由（2.13），对单项，

$$\begin{aligned} y_n(t) &= Y(n\omega_0)e^{in\omega_0 t} \\ &= \alpha(n\omega_0)H(n\omega_0)e^{in\omega_0 t} \end{aligned} \tag{2.17}$$

是对应于输入为

$$x_n(t) = \alpha(n\omega_0)e^{in\omega_0 t} \tag{2.18}$$

的输出．再利用系统的线性性质，则

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha(n\omega_0)H(n\omega_0)e^{in\omega_0 t} \tag{2.19}$$

是对应于（2.14）的输出．

进一步地，将（2.14）作变形

$$\tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_0\alpha(n\omega_0)e^{in\omega_0 t}\Delta(n\omega_0), \tag{2.20}$$

则对应的输出为

$$\tilde{y}(t) = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} T_0\alpha(n\omega_0)H(n\omega_0)e^{in\omega_0 t}\Delta(n\omega_0), \tag{2.21}$$

其中 $\Delta(n\omega_0)$ 为 $n\omega_0$ 点的增量．

如今设想 $n\to\infty$，$\omega_0\to 0$，$n\omega_0=\omega$，$T_0\to\infty$，则由(2.16)

$$\lim_{T_0\to\infty} T_0\alpha(n\omega_0) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}dt = X(\omega), \tag{2.22}$$

即 $X(\omega)$ 为输入 $x(t)$ 的富氏变换，相应地

$$\lim_{T_0\to\infty} \tilde{x}(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} X(\omega)e^{i\omega t}d\omega = x(t), \tag{2.23}$$

并且

$$\lim_{T_0\to\infty}\tilde{y}(t)=y(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}d\omega,\quad(2.24)$$

从而 $y(t)$ 对应的富氏变换 $Y(\omega)$ 由(2.24)可知

$$Y(\omega)=X(\omega)H(\omega)\quad(2.25)$$

和 (2.12) 完全相似. 因此，一般定常线性系统 $\mathscr{L}$ 的 FRF 可以由 (2.25) 所定义.

由(2.24)式可以看出：对一个定常的线性系统 $\mathscr{L}$，如果它的 FRF 是已知的，则给了输入 $x(t)$之后(要求它的富氏变换 $X(\omega)$存在)，则 $\mathscr{L}$ 的输出 $y(t)$也就完全确定了，即为(2.24)所确定. 因此在这种意义上说：FRF (即 $H(\omega)$) 完全刻画了 $\mathscr{L}$ 的频率域的特性，因为 $\omega$ 是角频率 $\omega=2\pi f$.

滤波器，如图 2.1 所示的 $RC$ 滤波器，当各器件（如电阻 $R$ 和电容 $C$）是稳定的，不随时间 $t$ 的变化而变化，则它往往是定常的线性系统. * 此时，由它的频域的特性 FRF，$H(\omega)$ 就可以认识该滤波器的性能，例如：可以了解它对输入信号 $x(t)$ 的哪个范围的频率成份将抑制（衰减），哪些频率成份可以通过，等等. 图 2.2 就是上述 $RC$ 滤波器 FRF 的幅度特性 $|H(\omega)|$，不同的 $RC$ 值对频率的抑制是不同的.

对于定常线性系统的刻画除了用 $H(\omega)$ 来描述之外还可以用它的富氏变换

$$h(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}H(\omega)e^{i\omega t}d\omega\quad(2.26)$$

来描述. 事实上大家知道，由正、反富氏变换的关系，由(2.26)可以确定 $H(\omega)$

$$H(\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}h(t)e^{-i\omega t}dt.\quad(2.27)$$

---

* 电学上认为由 $R$、$C$、$L$ 和纯放大器组成的网络往往是这种系统.

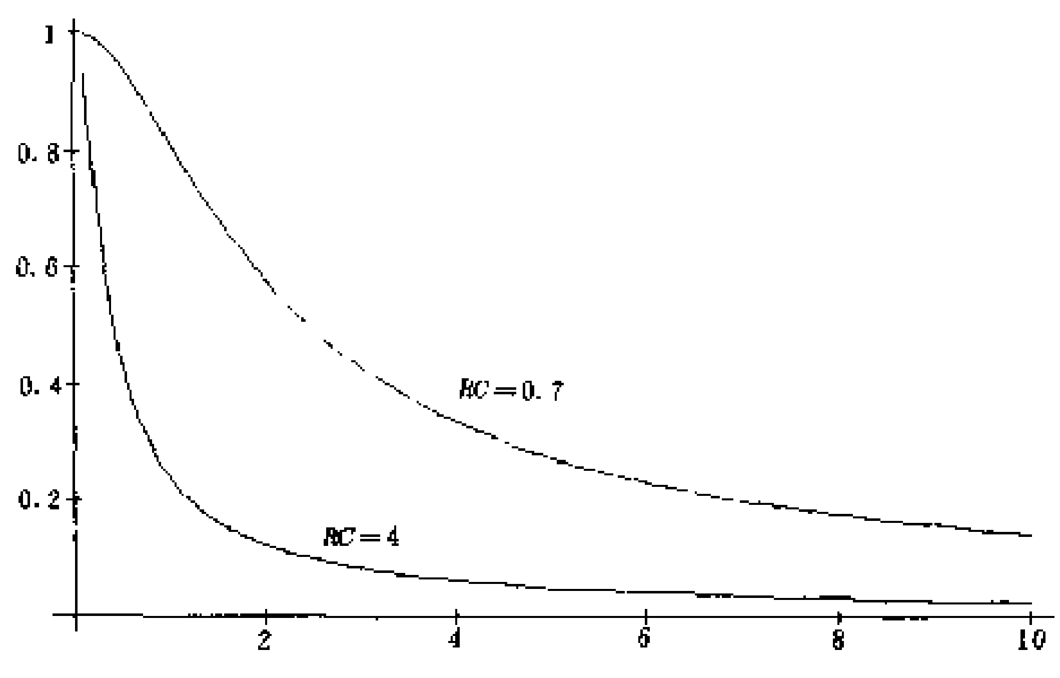



**图 2.2** 不同 $RC$ 值所对应的 $|H(\omega)|$

在系统理论中 $h(t)$ 称为是脉冲响应函数.

$$h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{RC}e^{-t/RC}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0\end{cases}\tag{2.28}$$

就是对应于（2.11），即图 2.1$RC$ 滤波器的脉冲响应函数.

脉冲响应函数称为 IRF（Impulse Response Function 的缩写）.

## 1.3 系统的物理可实现性.

（2.28）或一般的 IRF 在线性系统理论中可以有一种直观的意义，即：如果对一个定常线性系统 $\mathscr{L}$ 给它一个 $\delta(t)$ 脉冲函数的刺激，则其输出就是 $h(t)$ 即 IRF.

从图 2.1 的电路结构，我们求出了它的 $H(\omega)$

$$\begin{cases}H(\omega)=\dfrac{1}{1+i\omega RC};\\ h(t)=\begin{cases}\dfrac{1}{RC}e^{-t/RC}, & t\geqslant 0,\\ 0, & t<0.\end{cases}\end{cases}\tag{2.29}$$

于是，人们自然会问：反之，如果给了一对富氏变换的函数 $G(\omega)$ 及 $g(t)$，前者充当一个系统的 FRF，后者充当 $\mathscr{L}$ 的 IRF，则问在现实中这样定常线性系统 $\mathscr{L}$ 是否存在，比如是否可以真的用电阻 $R$，电容 $C$ 及电感 $L$ 等组成一个网络来实现？这一问题可以涉及到非常深刻也是非常难的数学理论，其内容也超出本书的范围．然而有二个明显的问题是可以讨论的：

1. 由 $h(t)$ 的意义可以看出，它是对应于对系统 $\mathscr{L}$ 给一个脉冲输入（比如 $t=0$）后引发的输出函数．由于 $\mathscr{L}$ 假定是无能源的，则它的输出 $h(t)$，在 $t>0$ 以后由于 $\mathscr{L}$ 没有能量的补充必然逐渐衰减 $h(t)\to 0, t\to\infty$.

为了数学上的叙述，我们认为 $h(t)$ 能量的有限的条件表为

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt < +\infty. \tag{2.30}$$

2. 由于 $h(t)$ 是 $t=0$ 时刻输入 $\delta(t)$ 之后引发出的函数，由于 $\mathscr{L}$ 是无源系统，则在 $t<0$ 时刻，$h(t)$ 应该是无输出的，即

$$h(t) = 0, \quad t < 0. \tag{2.31}$$

这一条件，工程上称为是“可物理实现的”．显然，如果给了一个 $h(t)$，它在 $t<0$ 是非零的，则这样的 IRF 在现实电路网络中是无法用无能源的元件来综合实现的！

由(2.29)可以看出图 2.1 对应的 $h(t)$ 既满足条件(2.30)，亦满足(2.31)—它是可物理实现的．

# §2 数字滤波器的数学刻画

## 2.1 数字滤波器.

由(2.24)式，将(2.22)和(2.27)代入可得

$$y(t)=\int_{-\infty}^{\infty}h(u)x(t-u)du. \tag{2.32}$$

这是滤波理论中的一个重要公式，称为卷积公式.（2.32）和（2.24）都是求输入输出关系的两个不同表达式，一个是频域（$\omega$）的表示法，另一个是时域（$t$）的表示.

近代科学技术发展的一大特点是信号的数字化，除了计算机的广泛应用而计算机又是数字运行的这一原因以外，数字技术又具备许多优点，如抗干扰等等. 因此，滤波技术相应地也发生了许多变化，随之而来的是数学理论也得到了许多发展.

怎样实现数字滤波，数字滤波器是怎么回事呢？我们从(2.32)式谈起：

由微积分的级数和逼近积分值的理论知，(2.32)的逼近式可写为

$$\begin{aligned}\tilde{y}(t)&=\sum_n h(u_n)x(t-u_n)\Delta_n\\&=\sum_n \tilde{h}(u_n)x(t-u_n),(\tilde{h}=h\cdot\Delta_n).\end{aligned} \tag{2.33}$$

如果考虑工程上的实现，则往往考虑（2.33）的如下形式：

$$y(t)=\sum_{n=-N}^{N}h_n x(t-u_n),h_n=\tilde{h}(u_n). \tag{2.34}$$

如果将 $x(t)$ 的自变量 $t$ 也离散化 $t=k\Delta$，$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…，$u_n=n\Delta$，则（2.34）变为

$$y(k\Delta) = y_k = \sum_{n=-N}^{N} h_n x((k-n)\Delta). \qquad (2.35)$$

今后用 $x_k = x(k\Delta)$，$y_k = y(k\Delta)$，$\Delta$ 为采样间隔，于是（2.35）可表为

$$y_k = \sum_{n=-N}^{N} h_n x_{k-n}. \qquad (2.36)$$

这就是数字化滤波器输入输出关系的表达式，$\{h_n\}$ 称为滤波器的权系数或仍保留原来的 IRF 名称.

当 $\Delta=1$，(2.36) 在工程上实现的图形如图 2.3 所示，其中 $h_k=0$，$k<0$（即（2.31）的条件）.

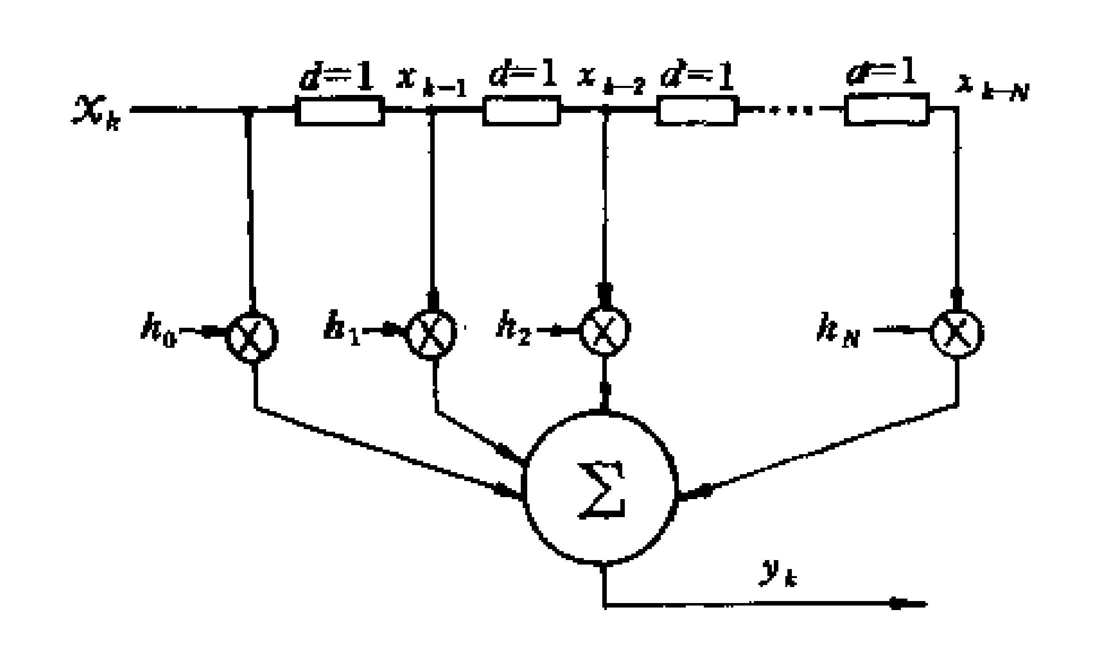



图 2.3 一个具有 $N+1$ 个抽头的可物理实现的数字滤波器

其中方框 d=1 表示一个单位时间的延迟，而⊗表示乘法器，其输出变为 $h_n x_{t-n}$，而最后的Σ表示对一切抽头的输出求和，即

$$y_k = h_0 x_k + h_1 k_{k-1} + \cdots + k_N x_{k-N}$$

$$= \sum_{n=0}^{N} h_n x_{k-n}. \qquad (2.37)$$

即完成了滤波的功能.

## 2.2 数字滤波器的 IRF 和 Z-变换.

前已述，对 (2.36) 的滤波公式，权系数 $\{h_k\}$ 仍称为 IRF (脉冲响应函数). 那么和 FRF 相对应的自然应是

$$H(e^{-i\omega}) = \sum_n h_n e^{-in\lambda} \tag{2.38}$$

(参看 (2.27)).

更一般地，给了一组系数 $\{h_n\}$，称

$$H(z) = \sum_n h_n z^n \tag{2.39}$$

为它的 Z-变换，而 Z 是复平面上的变量. (2.38) 是 (2.39) 当 $z=e^{-i\omega}$时的值—称为 $\{h_n\}$ 所对应的 FRF. 显然，数学上知道，当 (2.39) 是无穷级数时，并非任给 $\{h_n\}$ 它的 Z-变换 (2.39) 会有意义，更不用说 (2.38) 的存在.

在数学上，对滤波器的卷积表达式

$$y_k = \sum_n h_n x_{k-n} \tag{2.40}$$

中的 IRF $\{h_n\}$ 往往要求有以下的数学条件：

(1) $\{h_n\}$ 是一串实数列，满足

$$\sum_n |h_n| < +\infty; \tag{2.41}$$

(2) $h_n=0$, $n<0$. (2.42)

第一条相当于要求“能量”有限，因为从数学上 (2.41) 条件就保证了

$$\sum_n |h_n|^2 < +\infty. \tag{2.43}$$

事实上，由 (2.41) 知，对任意的 $\epsilon>0$, $\exists N_0>0$, 当 $N>N_0$ 之后

$$\sum_{n=N}^{\infty} |h_n| < \epsilon. \tag{2.44}$$

可见可要求$|h_n|<1$，当$n\geqslant N$. 于是由$|h_n|^2<|h_n|$，则

$$\sum_{n=N}^{\infty}|h_n|^2<\sum_{n=N}^{\infty}|h_n|<\varepsilon. \tag{2.45}$$

(2.43) 即为“能量”有限的条件.

第二条件(2.42)相当于要求该滤波器是可物理实现的. 由(2.37)和图2.3可以看出：如果以$k_0$代表当前时刻，则

$$y_{k_0}=h_0x_{k_0}+h_1x_{k_0-1}+\cdots+h_Nx_{k_0-N} \tag{2.46}$$

代表了$k_0$时刻的输出，它用到的$\{x_i\}$资料或数据只用“历史”的过去的$x_{k_0-1}$，$x_{k_0-2}$，$\cdots x_{k_0-N}$和当前的$x_{k0}$，这是“可物理实现”的. 倘若(2.46)变成双边的

$$y_{k0}=\cdots h_{-N}x_{k_0+N}+\cdots+h_{-1}x_{k_0+1}+h_0x_{k0}+h_1x_{k_0-1}+\cdots \tag{2.47}$$

势必要求用到“未来”的数据$\{x_{k_0+1}, x_{k_0+2}, \cdots\}$，然而在实用中在$k_0$时刻，它们是尚未收到的！所以工程上称之为是“不可物理实现”的*.

## 2.3 最小相位性

除了以上(2.41)、(2.42)条件外，为了工程及数学上的需要，对数字滤波器的IRF往往还加上以下的第三个条件：

$$(3)H(z)=\sum_n h_nz^n\neq 0, |z|\leqslant 1. \tag{2.48}$$

此条件称为是“具有最小相移”条件. 原因是在连续信号的电路滤波中，由于系统往往是用“惯性”元件，如$R$、$C$、$L$组合成，因而信号经滤波器输出后，其信号的相位会发生变化. 在数字滤波器的场合同样也会发生相位的变化. 例如：用IRF为

$$h_0=0.35, h_1=0.3, h_2=0.2, h_3=0.1, h_4=0.05$$

---

* 有些文献称前者是因果性的(Causal)，后者为非因果性的(Non-Causal).

的系数来对一个三角形数字序列进行（2.46）式的滤波，则其输入、输出的图形如图 2.4 所示.

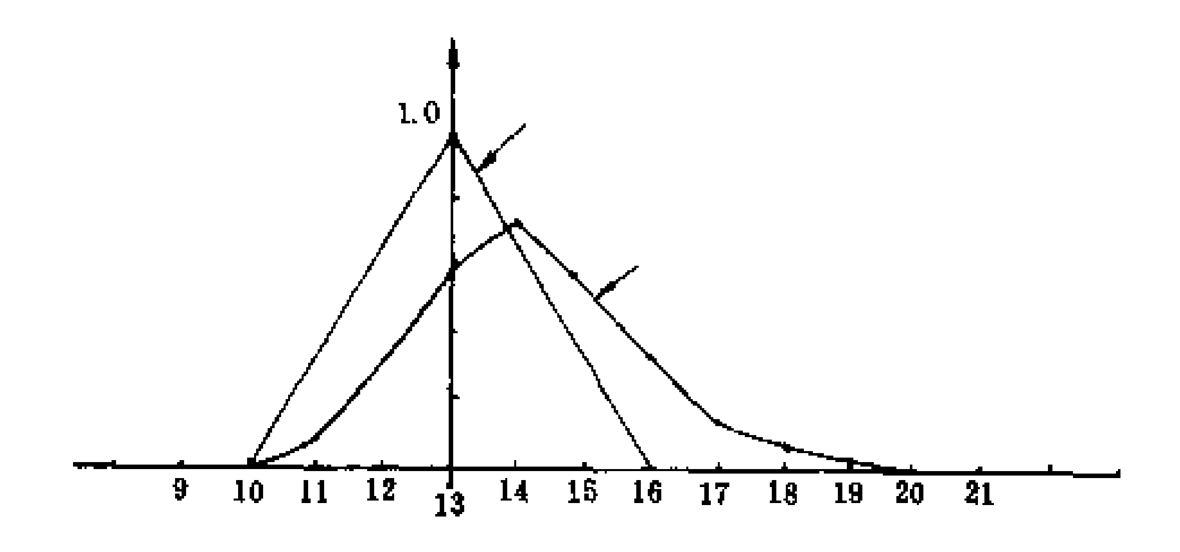



**图 2.4** 三角波滤波后的输出

由图 2.4 可以看出，输出的波形不仅变了而且它的极大值点向后延迟了一相位发生了变化.（2.48）的条件就使得滤波器具有最小相位.

如何去判别（2.48）是一个很难的数学问题. 如果 IRF 是有限项，比如，最高阶为 $N$，则

$$H(z) = h_0 + h_1 z + h_2 z^2 + h_3 z^3 + \cdots + h_N z^N \quad (2.49)$$

要满足条件（2.48）等于要求（2.49）的 $N$ 阶多项式的 $N$ 个根皆在单位圆外. 对实系数多项式，要判别这一事实可采用以下方法（参看 Xie，z.（1993））：

令
$$\Phi(z) = h_0 z^N + h_1 z^{N-1} + \cdots + h_{N-1} z + h_N \quad (2.50)$$

并改写为

$$\Phi(z) = a_N z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \cdots + a_1 z + a_0, \quad a_N > 0, \quad (2.51)$$

其中 $a_0 = h_N$，$a_1 = h_{N-1}$，…，$a_N = h_0$. 则 $H(z) \neq 0$，$|z| \leqslant 1$ 的充分必要条件为

A. $\Phi(1) > 0$；

B. $\Phi(-1)\begin{cases}<0, & 若 N 为奇数;\\ >0, & 若 N 为偶数.\end{cases}$

C. 令$b_k=a_0a_k-a_na_{n-k}$, $k=0, 1, \cdots, N-1$,

$c_k=b_0b_k-b_{N-1}b_{N-1-k}$, $k=0, 1, \cdots, N-2$,

$d_k=c_0c_k-c_{N-2}c_{N-2-k}$, $k=0, 1, \cdots, N-3$,

直到 $k=0, 1, 2, 3$ 我们可得到四个数，比如 $p_0$, $p_1$, $p_2$, $p_3$. 再令

$$q_0=p_0p_0-p_3p_3;\quad q_2=p_0p_2-p_3p_1,$$

则要求以下条件成立：

$$|a_0|<a_N,$$

$$|b_0|>|b_{N-1}|,$$

$$|c_0|>|c_{N-2}|,$$

$$\cdots\cdots$$

$$|q_0|>|q_2|. \tag{2.52}$$

以上诸条件，看起来似乎很复杂，其实不然，用计算机来判别还是很方便的.

特别地，当 $N=2$，设

$$H(z)=h_0+h_1z+h_2z^2, h_0>0, \tag{2.53}$$

则 $\Phi(z)=h_0z^2+h_1z+h_2=a_2z^2+a_1z+a_0$, $\quad a_2>0$.

于是 $H(z)\neq 0, |z|\leqslant 1$ 的充要条件为

1. $\Phi(1)=a_2+a_1+a_0>0$. $\quad$ (2.54)

2. $\Phi(-1)=a_2-a_1+a_0>0$, $(N=2)$. $\quad$ (2.55)

3. $|a_0|<a_2$. $\quad$ (2.56)

还原到(2.53)的系数是：$H(z)\neq 0, |z|\leqslant 1$ 的充要条件是：

1. $h_0+h_1+h_2>0$. $\quad$ (2.57)

2. $h_0-h_1+h_2>0$. $\quad$ (2.58)

3. $|h_2|<h_0$. $\quad$ (2.59)

事实上，读者可以利用代数知识直接证明（2.53）二次多项式根都在单位圆外的充要条件就是（2.57）—（2.59）三条.

如今利用以上知识来判别一下：图 2.4 的滤波器是否是具有最小相移的. 此时

$$H(z) = 0.35 + 0.3z + 0.2z^2 + 0.1z^3 + 0.05z^4, \tag{2.60}$$

则
$$\Phi(z) = 0.35z^4 + 0.3z^3 + 0.2z^2 + 0.1z + 0.05, \tag{2.61}$$

$$a_4 = 0.35, a_3 = 0.3, a_2 = 0.2, a_1 = 0.1, a_0 = 0.05.$$

验证以上 $A$，$B$，$C$ 三条件：

$$\text{A.}\ \Phi(1) = 0.35 + 0.3 + 0.2 + 0.1 + 0.05 = 1 > 0; \tag{2.62}$$

B. $N = 4$,

$$\Phi(-1) = 0.35 - 0.3 + 0.2 - 0.1 + 0.05 = 0.2 > 0; \tag{2.63}$$

C. $a_0 = 0.05 < 0.35 = a_4$ 成立. (2.64)

令 $b_0 = a_0^2 - a_4^2 = -0.12$，$b_1 = a_0a_1 - a_4a_3 = -0.1$，

$b_2 = a_0a_2 - a_4a_2 = -0.06$，$b_3 = a_0a_3 - a_4a_1 = -0.02$，

则 $|b_0| = 0.12 > 0.02 = |b_3|$ 成立. (2.65)

令
$$q_0 = b_0b_0 - b_3b_3 = 0.014,$$
$$q_2 = b_0b_2 - b_3b_1 = 0.0052,$$

可见
$$|q_0| = 0.014 > 0.0052 = q_2. \tag{2.66}$$

由（2.62）—（2.66）诸式看 $H(z) \neq 0, |z| \leqslant 1$，可见由（2.60）所对应的滤波，即图 2.4 对应的滤波

$$y_t = \sum_{k=0}^{4} h_k x_{t-k} \tag{2.67}$$

是具有最小相移的.

# 第三章　简单的加权平均滤波

## §1　用滤波来作测频器中的频率校正

### 1.1　简单的加权平均滤波.

由第二章中我们知道，数字滤波的公式可表为

$$y_t = \sum_n h_n x_{t-n}, \tag{3.1}$$

如果 $\{h_n\}$ 只有有限项，则（3.1）变为

$$y_t = \sum_{n=-M}^{M} h_n x_{t-n}, \tag{3.2}$$

特别当

$$h_n \equiv \frac{1}{2M+1}, \quad n = 0, \pm 1, \cdots, \pm M, \tag{3.3}$$

则（3.2）变成

$$\begin{aligned} y_t &= \frac{1}{2M+1} \sum_{n=-M}^{M} x_{t-n} \\ &= \frac{1}{2M+1}(x_{t-M} + x_{t-M+1} + \cdots + x_{-1} + x_0 + x_1 + x_2 + \\ &\qquad \cdots + x_{t+M}). \end{aligned} \tag{3.4}$$

可见通常的“平均”运算就是一种最简单的滤波. 它的 IRF 是( 3.3)，而 FRF 是

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \sum_{n=-M}^{M} h_n e^{-in\omega} \\
&= \frac{1}{2M+1}\sum_{n=-M}^{M} e^{-in\omega} \\
&= \frac{1}{2M+1}(1 + 2\cos\omega + 2\cos 2\omega + \cdots + 2\cos M\omega) \\
&= \frac{2}{2M+1}\left(\frac{1}{2} + \cos\omega + \cos 2\omega + \cdots + \cos M\omega\right).
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

利用

$$
\begin{aligned}
&1 + \cos\lambda + \cos 2\lambda + \cdots + \cos N\lambda \\
&= \frac{1}{2}\left\{\frac{\cos N\lambda - \cos(N+1)\lambda}{1-\cos\lambda} + 1\right\},
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

( 3.5) 可以缩写为

$$
\begin{aligned}
H(\omega) &= \frac{2}{2M+1}\left(\frac{1}{2}\left\{\frac{\cos M\omega - \cos(M+1)\omega}{1-\cos\omega}\right\}\right) \\
&= \frac{1}{2M+1}\left\{\frac{\cos M\omega - \cos(M+1)\omega}{1-\cos\omega}\right\}.
\end{aligned} \tag{3.7}
$$

显然 $H(\omega)$是实函数,这是因为 IRF 满足

$$
h_{-k} = h_k,\ k = 1,2,\cdots,M. \tag{3.8}
$$

由第二章的知识我们知道( 3.4) 是非因果性的，在实时处理上是不能用的，但是如果要滤波的“全部”数据已得到，则( 3.4) 相当于事后处理（不是在线处理）还是可以进行的.

由（ 3.7）可以看出：$|H(\omega)|$随着 $M$ 的增加而发生变化(见图 3.1). 由图 3.1 可以看出当 $m$ 小，即平均项数少，则“低通”去“高频噪声”(也就是数据的随机性“毛刺”) 的能力差，如 $m=3$，除 [0，0.5) 区间的主瓣外有一个宽的旁瓣一表明高

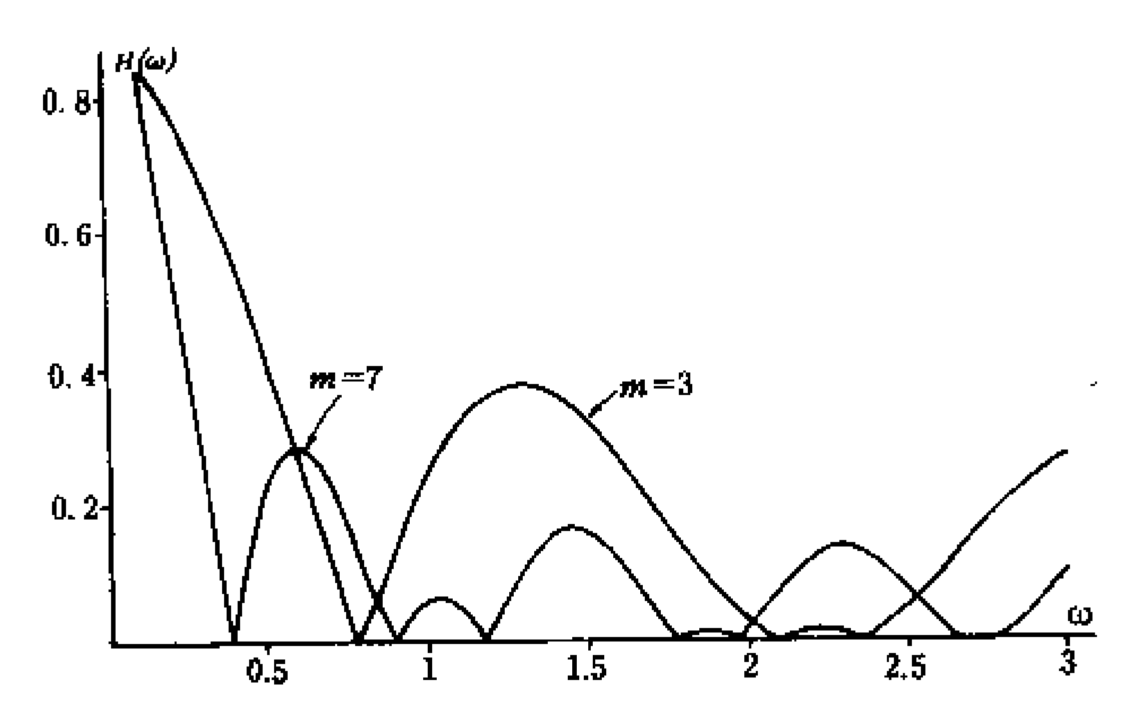



图 3.1　平均值滤波的 FRF，$m=3$ 和 $m=7$ 平均项愈多，低通的性能愈好

频成分还是可以通过，因而滤波输出不会很“光滑”；反之，当 $m$ 增加到 7，由图 3.1 可以看出其滤高频的性能就要好得多.

图 3.2 是一组受干扰的数据 $y(t)=0.23+0.14t+\varepsilon_t$ 的二种滤波结果，$\varepsilon_t$ 是白噪声序列. 图中 $m=3$ 对应的滤波效果不如 $m=7$ 的好. $m=3$ 的结果比 $m=7$ 的结果有较大的起伏，$m=7$ 比较平缓.

以上介绍的是最简单的一种滤波：平均移动（3.4）它的 IRF 是恒等的，即

$$h_k=\frac{1}{2M+1},\ n=0,\pm 1,\cdots,\pm M. \tag{3.9}$$

其抑制随机噪声—特别是高频噪声还是有效果的，但还不够理想，这可由图 3.1FRF 的特性和图 3.2 的例子看出. 一般说来要达到最佳的抑制噪声的效果 $\{h_k\}$ 的选择应根据噪声的特性来选择，因而不可能是等权的. 如何根据噪声特性来选最佳的 IRF，我们将在后而几章里加以介绍.

虽然（3.2）的滤波形式非常简单，但是它在许多实际问题

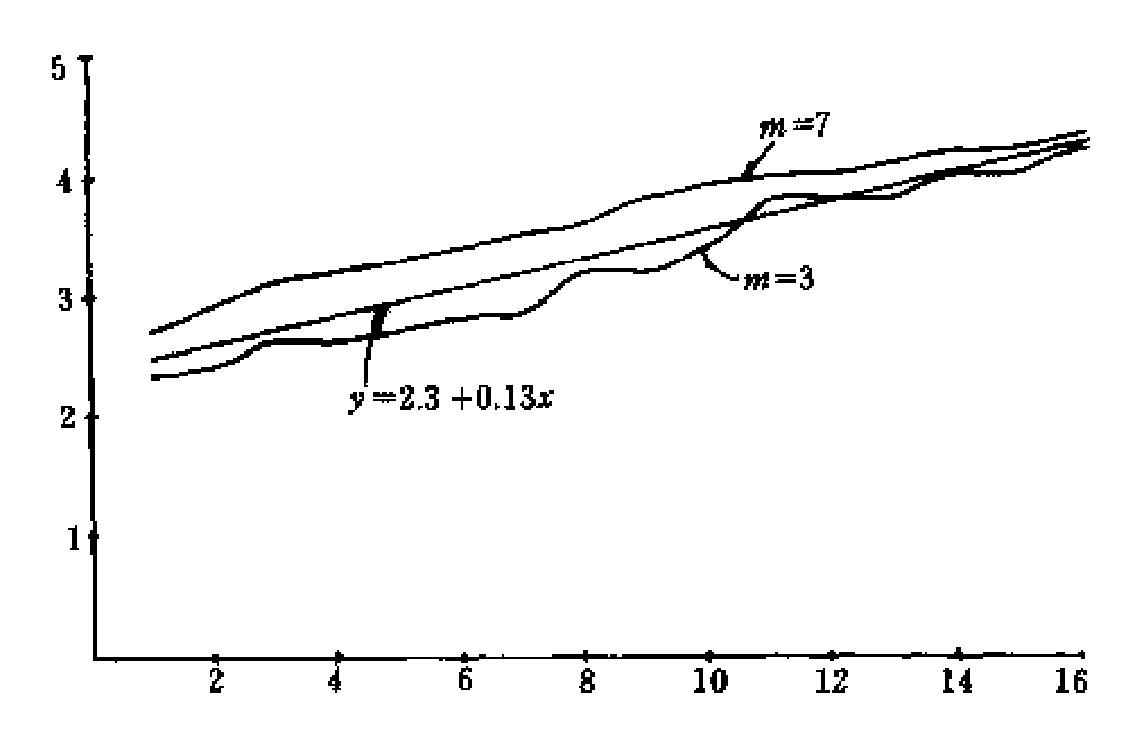



图 3.2 $m=3$ 和 $m=7$ 对噪声数据的滤波结果，其中直线为理论值

中非常有用. 以下就介绍一个实际问题中提出来的例子.

## 1.2 测频器中的频率校正问题.

测频器是一种量测振动频率的电子仪器. 按物理学上通常的理解，频率应是单位时间内某种物体的振动次数. 如果该物体的振动理论上是恒定的，则量测其频率就比较容易，比如在 $\Delta$ 间隔内对振动总次数加以计数，再除以 $\Delta$ 即可得它的频率. 反之，如果该物体的振动不是恒定的，而且变频的，则在 $\Delta$ 间隔内量测到的只是平均的频率而不能量测到任一 $t_i$ 的瞬时频率. 例如：某型号的数字测频仪，在 $\Delta$ 间隔内测量到振动次数为 $N_i$ 次，则反映出来的平均频率是

$$\bar{f}_i=\frac{N_i f_0}{N_0 n}, \tag{3.10}$$

其中 $f_0$ 是仪器中石英振荡标准频率，比如 $f_0=5\text{Mc}$，$N_0$ 是量测 $\Delta$ 间隔内的分频次数，例如：$N_0=2\times10^6$，$n=256$. 然而在许多科技工作中需要的不能是平均频率 $\bar{f}_i$，而希望能得到瞬时频率

$f_i$. 于是理论上提出一个问题：给了许多时间间隔 $\Delta$ 内的平均频率 $\{\overline{f}_i, i=0, \pm 1, \cdots\}$，能不能由平均频率获得瞬时频率 $\{f_i\}$ 呢？

理论上，我们不妨认为 $t$ 时刻的瞬时频率为 $f(t)$，其 $t_i=i\Delta$ 时刻的平均频率为

$$\overline{f}_i = \overline{f(t_i)} = \frac{1}{\Delta}\int_{\left(i-\frac{1}{2}\right)\Delta}^{\left(i+\frac{1}{2}\right)\Delta} f(t)dt, t_i = i\Delta, \qquad (3.11)$$

问题化为由 $\{\overline{f}_i\}$ 出发去估计 $f(t_i)$.

设想 $t=t_i+\tau$，而且 $f(t)$ 有足够的光滑性，则可将它展开成 Taylor 级数

$$f(t) = f(t_i) + f'(t_i)\tau + \cdots + \frac{f^{(n)}(t_i)}{n!}\tau^n + o\left(\frac{1}{n!}\right). \qquad (3.12)$$

为了应用于实际，我们可略去（3.12）的余项并代入于下列积分式中：

$$S_{m_i} = \frac{1}{m}\int_{t_i-\frac{m}{2}}^{t_i+\frac{m}{2}} f(t)dt, \ m = \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (3.13)$$

可得

$$\begin{aligned} mS_{m_i} &= \int_{-\frac{m}{2}}^{\frac{m}{2}} f(t_i + \tau)d\tau \\ &= mf(t_i) + \frac{f^{(2)}(t_i)}{2!}\frac{2}{3}\left(\frac{m}{2}\right)^3 + \cdots \\ &\quad + \frac{f^{(2n)}(t_i)}{(2n)!}\frac{2}{2n+1}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n+1}, \end{aligned}$$

或

$$S_{m_i} = f(t_i) + \frac{f^{(2)}(t_i)}{3!}\left(\frac{m}{2}\right)^2 + \cdots + \frac{f^{(2n)}(t_i)}{(2n+1)!}\left(\frac{m}{2}\right)^{2n}. \qquad (3.14)$$

于是，问题化为：已知（3.13）中的 $\{Sm_i\}$，如何去恢复 $f(t_i)$？

如果取定一个 $n$ 值，取一系列的 $m$，则（3.14）就变成了 $\{f, f^{(2)}, \cdots, f^{(2n)}\}$ 为未知数的一组线性方程组，只要取合适的 $m$ 使行列式不退化，则可以解出 $\{f, f^{(2)}, \cdots, f^{(2n)}\}$. 其中 $f$ 就是我们所求的.

比如取 $n=3$，$m=1, 3, 5, 7$，则（3.14）变成已知

$$\begin{cases} s_{1i} = x_0 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 x_1 + \dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 x_2 + \dfrac{1}{7!}\left(\dfrac{1}{2}\right)^6 x_3, \\ s_{3i} = x_0 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{3}{2}\right)^2 x_1 + \dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{3}{2}\right)^4 x_2 + \dfrac{1}{7!}\left(\dfrac{3}{2}\right)^6 x_3, \\ s_{5i} = x_0 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 x_1 + \dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{5}{2}\right)^4 x_2 + \dfrac{1}{7!}\left(\dfrac{5}{2}\right)^6 x_3, \\ s_{7i} = x_0 + \dfrac{1}{3!}\left(\dfrac{7}{2}\right)^2 x_1 + \dfrac{1}{5!}\left(\dfrac{7}{2}\right)^4 x_2 + \dfrac{1}{7!}\left(\dfrac{7}{2}\right)^6 x_3. \end{cases} \tag{3.15}$$

解此方程组，可得

$$x_0 = f_i = \frac{\begin{vmatrix} s_{1i} & 1 & 1 & 1 \\ s_{3i} & 3^2 & 3^4 & 3^6 \\ s_{5i} & 5^2 & 5^4 & 5^6 \\ s_{7i} & 7^2 & 7^4 & 7^6 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3^2 & 3^4 & 3^6 \\ 1 & 5^2 & 5^4 & 5^6 \\ 1 & 7^2 & 7^4 & 7^6 \end{vmatrix}}. \tag{3.16}$$

（3.16）可计算出

$$\begin{aligned} f_i = {} & 1.1962891 s_{1i} - 0.23925781 s_{3i} \\ & + 0.04785156 s_{5i} - 0.00488281 s_{7i}, \end{aligned} \tag{3.17}$$

其中

$$s_{1i}=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}f(t_i+\tau)d\tau=\bar{f}\ (t_i)=\bar{f}_i,$$

$$s_{3i}=\frac{1}{3}\int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{3}{2}}f(t_i+\tau)d\tau=\frac{1}{3}\sum_{j=-1}^{1}\bar{f}_{i+j},$$

$$s_{5i}=\frac{1}{5}\int_{-\frac{5}{2}}^{\frac{5}{2}}f(t_i+\tau)d\tau=\frac{1}{5}\sum_{j=-2}^{2}\bar{f}_{i+j},\qquad(3.18),$$

$$s_{7i}=\frac{1}{7}\int_{-\frac{7}{2}}^{\frac{7}{2}}f(t_i+\tau)d\tau=\frac{1}{7}\sum_{j=-3}^{3}\bar{f}_{i+j}.$$

将（3.18）各式代入（3.17）可得

$$\begin{aligned}f(t_i)&=b_0\bar{f}_i+b_1(\bar{f}_{i-1}+\bar{f}_{i+1})+b_2(\bar{f}_{i-2}+\bar{f}_{i+2})\\&\quad+b_3(\bar{f}_{i-3}+\bar{f}_{i+3})\\&=\sum_{k=-3}^{3}b_k\bar{f}_{i-k},\end{aligned}\qquad(3.19)$$

其中 $b_{-k}=b_k$，$k=1,2,3$，

$$b_0=1.12540927,\quad b_1=-0.07087979,$$
$$b_2=0.00887280,\quad b_3=-0.00069751.\qquad(3.20)$$

显见，（3.19）是对称 IRF 的非因果性滤波.

## §2　X-11 及其在经济预测预报中的应用

### 2.1　X-11 算法.

在许多课题中，如经济计划，股票行情分析等都需要作预测预报. 在对未来的预测中人们首要关心的是“未来的趋势如

何？是否有周期性的变化？等等．美国的时间序列分析工作者曾给出并研讨了一种非常实用而在广泛应用中还颇有成效的数据分析方法—称为 $X$-11 方法．其考虑问题的出发点是，比如图 3.3 是一张某航空公司历史售票的记录图*．

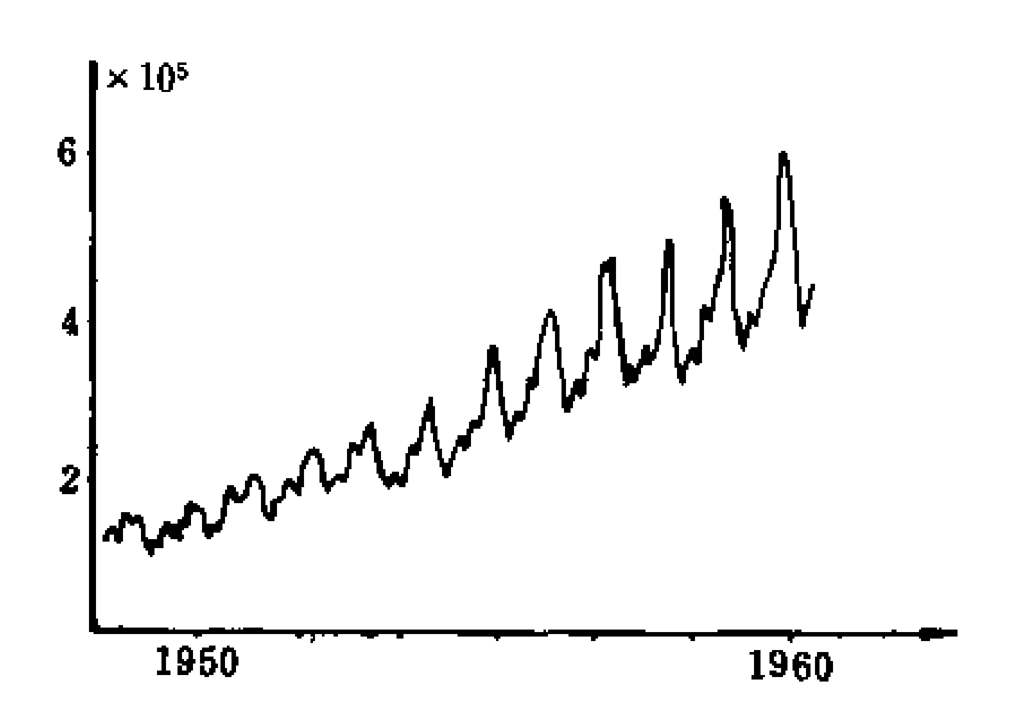



图 3.3　国际航空公司月客户量自 1949—1960 年的记录

此时可认为图 3.3 中该记录 $x_t$ 可分解为三个成分

$$x_t = T_t + S_t + \epsilon_t, \tag{3.21}$$

其中 $x_t$ 中包含有一个"趋势"的成分，记为 $T_t$，此外含有季节性的成分，即每年 6～7 月份是最高峰，季节性的分量记为 $S_t$．此外，$x_t$ 中还存在着不好预先估计的随机因素，记为 $\epsilon_t$．

$X$-11 方法给出了一种分解 $x_t$ 为 $T_t$、$S_t$ 和 $\epsilon_t$ 的方法．例如，图 3.4、3.5、3.6 就是用 $X$-11 方法将该航空公司客户量的记录分解出来的"趋势"，"季节性分量"与"不规则分量"．

很显然，一旦分解出上述 $T_t$、$S_t$，对航空公司的计划管理人员讲具有重要的指导性的意义．公司可以从数量上利用 $T_t$ 和

* 见 Box & Jenkins (1970)．p. 531

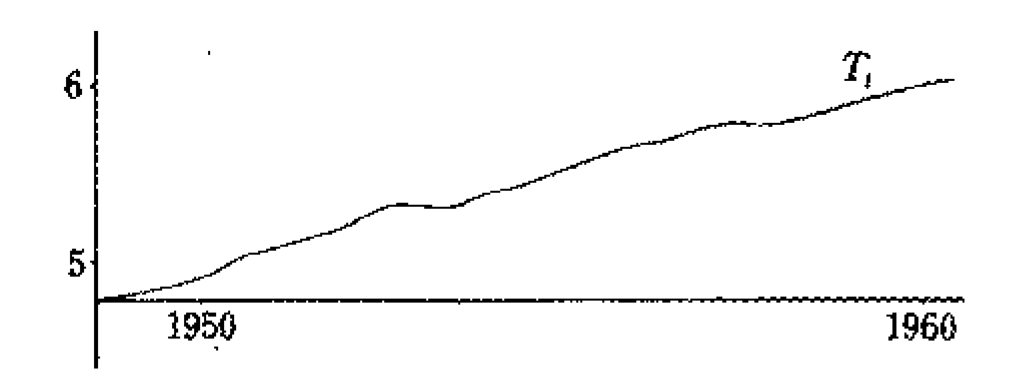



图 3.4　由图 3.3 用 $X$-11 方法分解出来的趋势成分 $T_t$

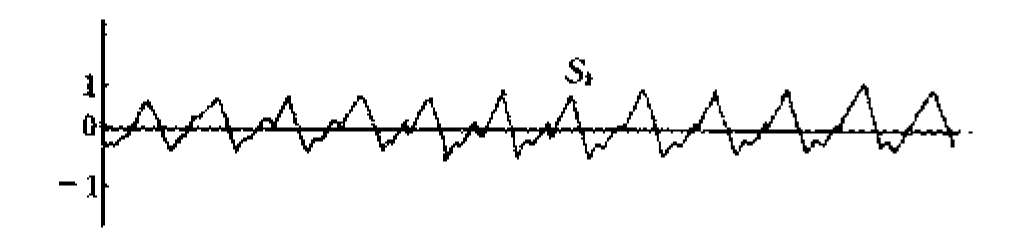



图 3.5　由图 3.3 用 $X$-11 方法分解出来的季节成分 $S_t$

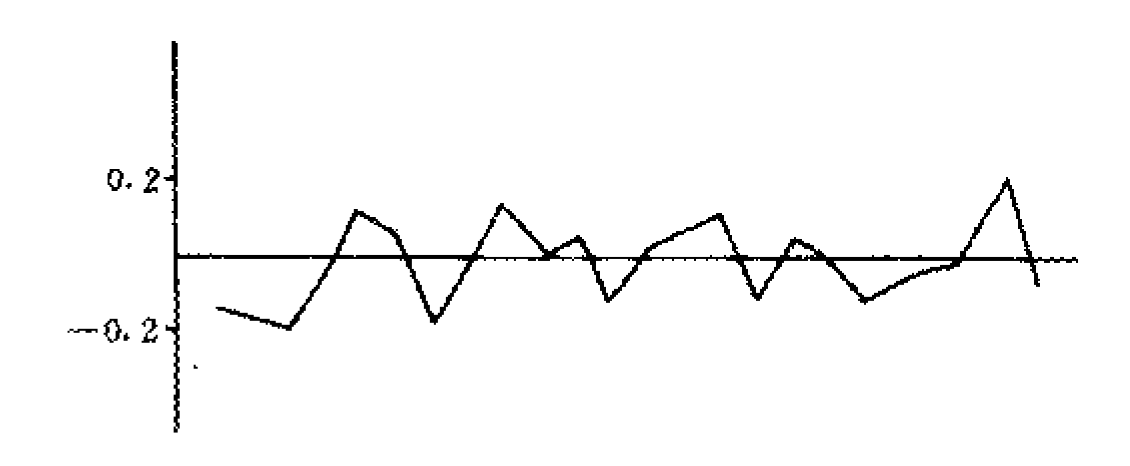



图 3.6　用 $X$-11 方法从图 3.3 中分解出来的不规则成分 $\varepsilon_t$

$S_t$ 作计划上的调整.

那么由图 3.3 对应的记录 $x_t$ 是用什么方法分解出 $T_t$、$S_t$ 和 $\varepsilon_t$ 呢？$X$-11 的分解方法就是靠对 $X_t$ 进行以下一系列的滤波而

获得的.

（1）将 $x_t$ 进行第一次滤波，滤波器记为 $F_1$，其输出称为"趋势的初估计"，记为 $\hat{T}_t$，即

$$F_1(x_t) = \hat{T}_t. \tag{3.22}$$

$F_1$ 滤波器的 IRF 是

$$h_0 = \frac{1}{12}, \tag{3.23}$$

$$h_6 = h_{-6} = \frac{1}{24}, \tag{3.24}$$

$$h_k = h_{-k} = \frac{1}{12},\ k = 1,2,3,4,5. \tag{3.25}$$

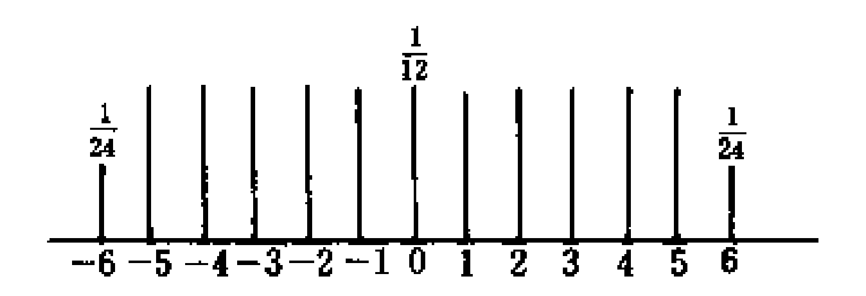



图 3.7　X-11 中对 $\hat{T}_t$ 估计的滤波 $F_1$ 的 IRF.

其图形如图 3.7 所示.

（2）令 $y_t = x_t - \hat{T}_t$. （3.26）

并将 $y_t$ 进行第二次滤波，滤波器记为 $F_2$，其输出称为"季节性成分的初估计"，记为 $\hat{S}_t$，即

$$F_2(y_t) = \hat{S}_t. \tag{3.27}$$

$F_2$ 的 IRF 是

$$h_0 = 0.333,$$

$$h_{12} = h_{-12} = 0.222,$$

$$h_{24} = h_{-24} = 0.111,$$

$$h_k = h_{-k} = 0, \text{当 } k \neq 0, 12, -12, 24, -24. \tag{3.28}$$

由（3.28）可看出该滤波系数是稀疏型的. 其图形如图 3.8 所示. 显然（3.28）是考虑到含有以 12 为周期来设计的.

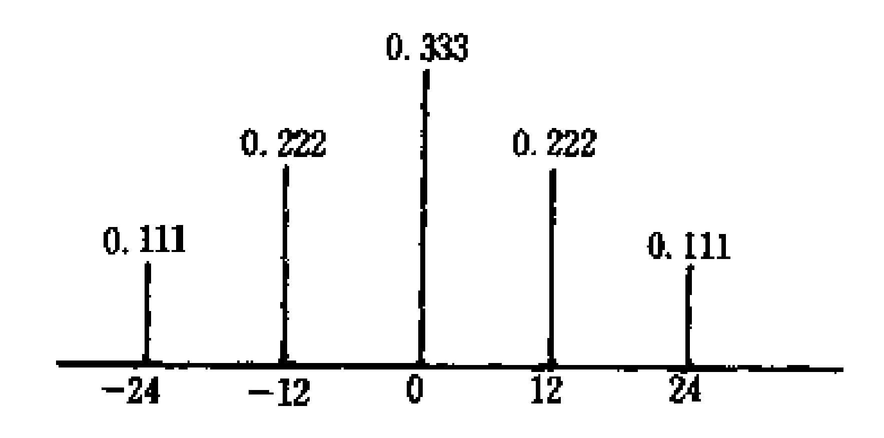



图 3.8　$X$-11 中 $F_2$ 所对应的 IRF

（3）第三步，令 $Z_t = x_t - \hat{S}_t$，　　(3.29)

并将它输入于第三个滤波器 $F_3$，其输出记为 $T_t$，是 $x_t$ 的趋势成分 $T_t = F_3(Z_t)$，$F_3$ 的 IRF 是

$$\begin{aligned}
h_0 &= 0.24, \\
h_1 &= h_{-1} = 0.214, \\
h_2 &= h_{-2} = 0.147, \\
h_3 &= h_{-3} = 0.066, \\
h_4 &= h_{-4} = 0.0, \\
h_5 &= h_{-5} = -0.028, \\
h_6 &= h_{-6} = -0.019.
\end{aligned} \tag{3.30}$$

它们对应的图形如图 3.9 所示.

（4）第四步. 令 $g_t = x_t - T_t$，　　(3.31)

并输入于滤波器 $F_4$，其输出记为 $S_t$，

$$S_t = F_4(g_t), \tag{3.32}$$

是对应于 $x_t$ 的季节性成分. $F_4$ 滤波器的 IRF 选为

$$
\begin{aligned}
&h_0 = 0.2, \\
&h_{12} = h_{-12} = 0.2, \\
&h_{24} = h_{-24} = 0.13, \\
&h_{36} = h_{-36} = 0.07, \\
&h_S = 0, \text{当 } S \neq 0, \pm 12, \pm 24, \pm 36,
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

其图象如图 3.10 所示.

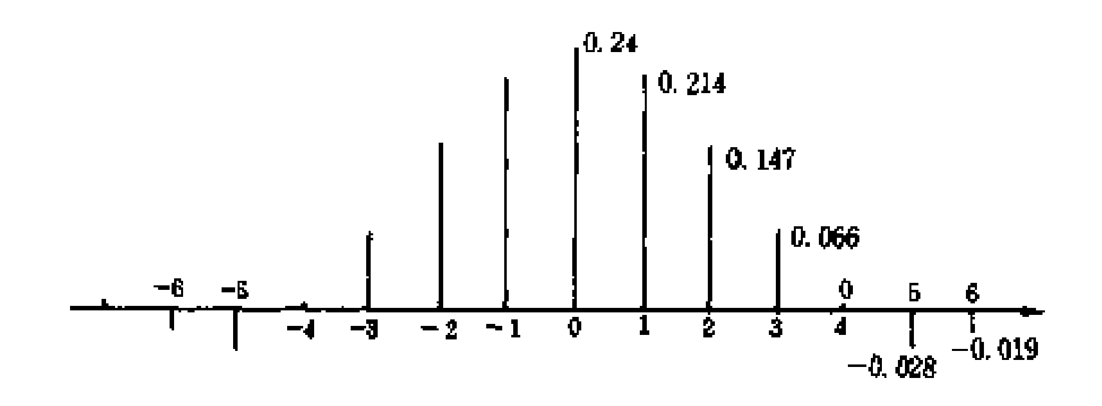



图 3.9 $X$-11 方法中提取 $T_t$ 的滤波器 $F_3$ 的 IRF

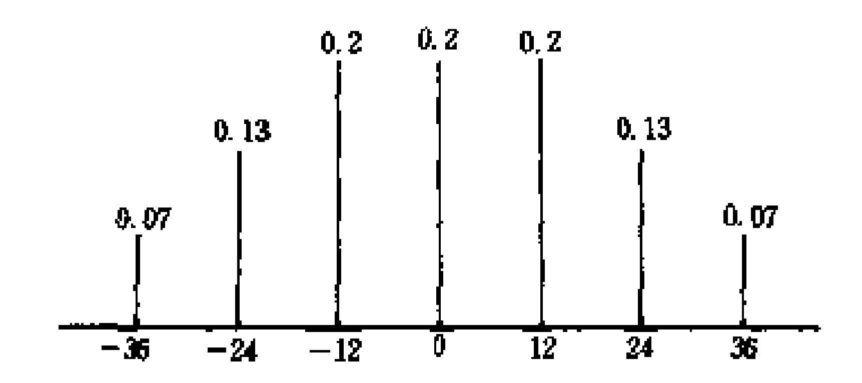



图 3.10 $X$-11 中提取 $S_t$ 的 $F_4$ 的 IRF

(5) 第 5 步. 令

$$
\varepsilon_t = x_t - T_t - S_t, \tag{3.34}
$$

则它对应的是 $x_t$ 中的不规则成分.

从 $x_t$ 的实测数据出发,经过以上 5 个步骤就可以获得 $x_t$ 中的趋势成分(如图 3.4)$T_t$ 及季节性或称周期性的成分 $S_t$.

## 2.2 用 $X$-11 方法作短期预测预报.

以上介绍的 $X$-11 方法在国外经济工作者中间已为许多人所掌握并运用于实际工作中，近年来国内金融界也开始学习和应用.

然而，如果要运用 $X$-11 作预报工作，尚存在以下问题：

(1) 无论是 $T_t$ 或 $S_t$，$X$-11 所能提供的是由数据出发获得另一些数据. 它不提供数学公式，因而 $T_t$ 和 $S_t$，其 $t$ 所属的集合均在“历史”的范围，没有告诉我们如何将它们“延拓”到“未来”的方法.

(2) 由第二章的知识读者可以看出：$F_1 \sim F_4$ 是属于“非因果型”的滤波. 即假设观测数据为

$$x_0, x_1, x_2, \cdots, x_M, x_{M+1}, \cdots, x_{N-M}, x_{N-M+1}, \cdots, x_N, \tag{3.35}$$

而滤波 $F$ 的 IRF 为

$$F: h_{-M}, h_{-M+1}, \cdots, h_{-1}, h_0, h_1, \cdots, h_M, \tag{3.36}$$

则

$$\begin{aligned} y_t &= F(x_t) \\ &= \sum_{k=-M}^{M} h_k x_{t-k}, \quad t = M, M+1, \cdots, N-M, \end{aligned} \tag{3.37}$$

可见与 $x_t$ 的（3. 35）序列相比，$y_t$ 的两端缺了数据（参看图 3.11).

由图 3.11 可以看出 $[0, M]$ 和 $[N-M+1, N]$ 两端得不到趋势 $T_t$ 和季节性成分 $S_t$ 的数据. 因此，如果不能将它们“补上”，则不仅谈不上对 $N+1$，$N+2$，… “未来”部分的认识，甚至连“近年”来的 $T_t$ 和 $S_t$（$t=N-M+1$，…，$N$）也无从认识.

因而如何通过适当的手段使 $X$-11 的输出能包含两端的数

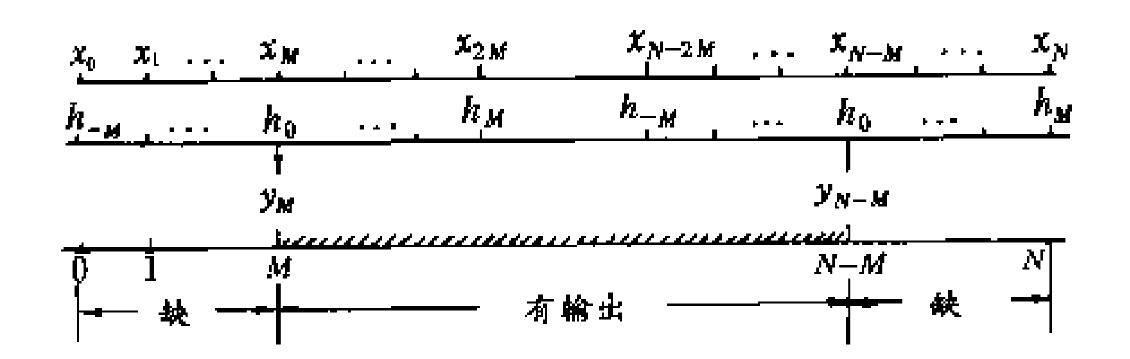



图 3.11 由于 X-11 的非因果性滤波造成两端的数据空缺

据是时间序列分析专家讨论了许多年的问题，详细的可见 Xie (1993). 以下介绍两种常用的方法：

（1）平直延伸法. 即首先将观测值 $\{x_t, t=0, 1, 2, \cdots, N\}$ 延伸至 $\{x_t, t=0, 1, 2, \cdots, N, N+1, \cdots, N+M\}$，其中定义

$$x_{N+k} = x_N, k = 1,2,\cdots,M. \tag{3.38}$$

然后利用 X-11 的 4 步滤波处理 $\{x_t, 0 \leqslant t \leqslant N+M\}$. 显然，此时可获得

$$T_t, S_t, t = M, M+1, \cdots, N \tag{3.39}$$

的估计（见图 3.12）.

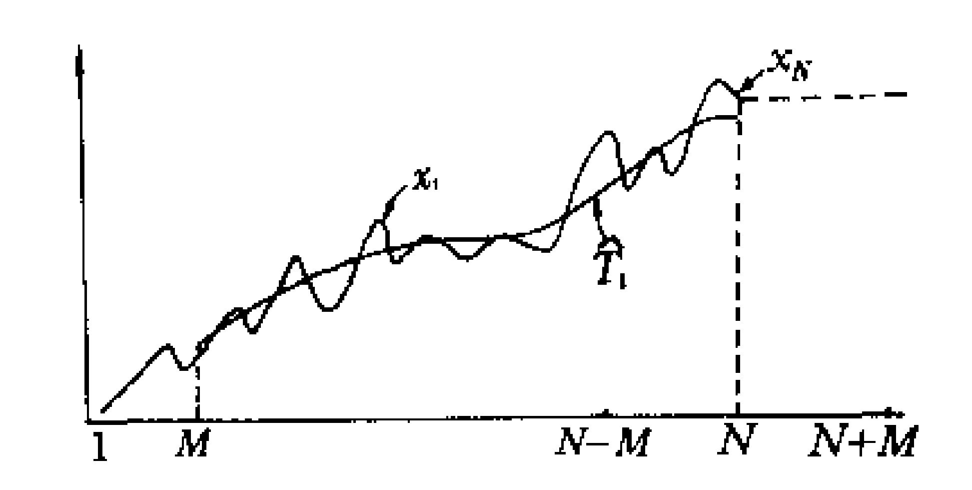


图 3.12 平直延伸 $M$ 个数据以获完整的 $T_t$、$S_t$ 的估计

（2）回归延拓法. 此方法的特点是先估计 $S_t$ 在 $[N-M+$

$1, N]$ 范围内的值. 再去估同一范围 $T_t$ 的值. 以下先介绍如何估计 $S_t$, $t=N-M+1$, $N-M+2$, …, $N$ 的值.

由 $X$-11 的 4 个滤波步骤可获得 $S_t$ 在 $[M, N-M]$ 的估计(以国际航空公司的图 3.3 为例，可得图 3.5 的季节成分 $S_t$). 从图上已明显看出 $S_t$ 的周期性(但还不完全是周期函数). 设想在 $[M, N-M]$ 内有 $L$ 个周期图形，第 $l$ 个图形的函数记为

$$S_l(t), 1 \leqslant t \leqslant P, \quad l = 1,2,\cdots,L, \tag{3.40}$$

(本例 $P=12$，即周期长为 12 个月)，于是令

$$\tilde{S}(t) = \frac{1}{L}\sum_{l=1}^{L} S_l(t + P(l-1)), 1 \leqslant t \leqslant P \tag{3.41}$$

作为理想的周期成份. 于是在 $[N-M+1, N]$ 范围内可以将 $\tilde{S}(t)$ 对准相位后往外延拓即可获 $S_t$ 在 $[M, N]$ 区间内的 $S_t$ 值. 读者不难看出，此法亦可用于 $[0, M-1]$ 左段 $S_t$ 的估计.

以上的方法，可用以下简单数据来说明之：设用 $X$-11 方法已估得 $S_t$ 的如下数据：

$$\begin{aligned}
&S_4 = 2, S_5 = 5, S_6 = 1, S_7 = 0, S_8 = 1,\\
&S_9 = 2, S_{10} = 6, S_{11} = 2, S_{12} = 0, S_{13} = -1,\\
&S_{14} = 1, S_{15} = 5, S_{16} = 1, S_{17} = -1, S_{18} = 0,\\
&S_{19} = 2, S_{20} = 7, S_{21} = 2, S_{22} = 0, S_{23} = 1,\\
&S_{24} = 1,
\end{aligned} \tag{3.42}$$

$S_{25}$, $S_{26}$, $S_{27}$和 $S_1$, $S_2$, $S_3$ 数据缺.
此时 $M=3$, $N=27$, $P=5$ (周期为 5), $L=4$. 于是由(3.41)可以求出理想周期成分为

$$\tilde{S}(t) = \frac{1}{4}\sum_{l=1}^{4} S_l(t + 5(l-1)), 1 \leqslant t \leqslant P, \tag{3.43}$$

对应于(3.42)各值如下：

$$\tilde{S}(1) = 1.75, \quad \tilde{S}(2) = 5.75,$$

$$\tilde{S}(3)=1.5,\ \tilde{S}(4)=-0.25,\ \tilde{S}(5)=0.25, \quad (3.44)$$

于是，可以将（3.42）的两端利用（3.44）对准相位后作延拓如下（$\hat{S}_i$ 为补充的，$S_k$ 为 $X$-11 分解的数据）：

$$\hat{S}_1=1.5,\ \hat{S}_2=-0.25,\ \hat{S}_3=0.25,$$

$$S_4=2,\ S_5=5,\ S_6=1,\ S_7=0,\ S_8=1,$$

$$\cdots\cdots$$

$$S_{24}=1,\ \hat{S}_{25}=5.75,\ \hat{S}_{26}=1.5,\ \hat{S}_{27}=-0.25.$$

有了 $S_t$，$0\leqslant t\leqslant N$ 的估计以后就可以利用统计学上的回归方法来估计 $T_t$，$[0,M-1]$和$[N-M+1,N]$. 事实上由（3.21）式，令

$$z_t=x_t-S_t,\quad 0\leqslant t\leqslant N, \tag{3.45}$$

则由（3.21）知

$$z_t=T_t+\varepsilon_t, \tag{3.46}$$

它变成统计学上的回归问题，即已知 $z_t$，$t=0,1,\cdots,N$ 的值，如何去估计 $T_t$. 如果 $T_t$ 考虑为线性函数，则（3.46）变成

$$z_t=\alpha t+\beta+\varepsilon_t. \tag{3.47}$$

于是统计学上告诉我们当 $\varepsilon_t$ 为 $N(0,\sigma^2)$ 白噪声列时，最好的对 $(\alpha,\beta)$ 的估计是

$$\hat{\alpha}=\frac{S_{tz}}{S_{tt}}, \tag{3.48}$$

$$\hat{\beta}=\bar{z}-\hat{\alpha}\bar{t}, \tag{3.49}$$

其中
$$\bar{t}=\frac{1}{N+1}(0+1+2+\cdots+N),$$

$$\bar{z}=\frac{1}{N+1}\sum_{t=0}^{N}z_t,$$

$$S_{tt}=\frac{1}{N+1}\sum_{t=0}^{N}(t-\bar{t})^2,$$

$$S_{tz}=\frac{1}{N+1}\sum_{t=0}^{N}(z_t-\bar{z})(t-\bar{t}). \qquad (3.50)$$

这样就可以得到 $T_t$，$t=N-M+1$，$N-M+2$，…，$N$ 的数据.

至于比较复杂的 $z_t$，一般可用 $P$ 阶多项式来回归：

$$z_t=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_Pt^P+\varepsilon_t \qquad (3.51)$$

即认为趋势 $T_t=a_0+a_1t+a_2t^2+\cdots+a_Pt^P$， (3.52)

而 $\varepsilon_t$ 仍考虑为 $N$ $(0,\sigma^2)$ 白噪声序列. 此时由 $z_t$，$t=0,1,2,$ …，$N$ 如何去估计 $\{a_0, a_1, \cdots, a_P\}$ 参数，统计学上已有许多成熟的算法和软件，具体计算公式可参看 [17].

最后，我们来介绍如何作预报. 用上面介绍的方法已可获得

$$T_t, t=0,1,2,\cdots,N,$$

$$S_t, t=0,1,2,\cdots,N.$$

对于 $S_t$，如果用平直延伸法（3.38）得到的，则应用（3.40），（3.41）的办法将 $S_t$ 延拓到 $S_t$，$t=N+1$，$N+2$，…，$N+\tau$，（$\tau$ 一般不宜太大，$1\leqslant\tau\leqslant 6$ 为宜）. 此外对 $T_t$ 的较近的数据 $[T_{N-H}, T_{N-H+1}, \cdots T_N]$ 范围内用多项式拟合或用样条(Spline）拟合后即可外延到 $T_{N+1}$，$T_{N+2}$，…，$T_{N+\tau}$，随后令

$$\hat{x}_t=T_t+S_t, t=N+1,\cdots,N+\tau, \qquad (3.53)$$

即可作为 $x_t$ 向外推的预测值.

## 2.3 X-11 的整体性滤波法.

由前已述，对数据 $x_t$，$t=0,1,2,\cdots,N$，进行 X-11 的分解，需要经过前后 5 个步骤的滤波和运算，手续上显得比较繁复. 以下将介绍的是：将 4 个滤波手续视为一个整体，则其运作可分析如下：

首先我们指出以下的事实：假如 $F_1$ 的 IRF 为 $\{h_1(k)$，$k=$

$0, \pm 1, \cdots\}$，$F_2$ 的 IRF 为 $\{h_2(t), t=0, \pm 1, \cdots\}$，满足

$$\sum_k |h_i(k)| < +\infty, \ i = 1,2, \tag{3.54}$$

$F_i$ 的 FRF 为

$$H_i(e^{-i\omega}) = \sum_k h_i(k) e^{-ik\omega}, \ i = 1,2. \tag{3.55}$$

令 $F_3$ 为联合系统，即先经 $F_1$ 滤波后再经 $F_2$ 滤波（参看图 3.13），

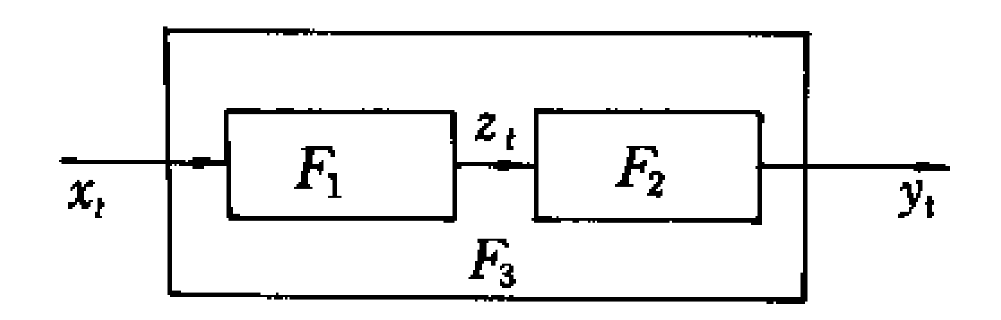



图 3.13 将 $y_t$ 看为 $F_3=F_1 \cdot F_2(x(t))$ 的输出

则 $F_3$ 的 IRF 为

$$h_3(\tau) = \sum_k h_2(k) h_1(\tau - k), \tag{3.56}$$

而 $F_3$ 的 FRF 为

$$H_3(e^{-i\omega}) = H_1(e^{-i\omega}) H_2(e^{-i\omega}). \tag{3.57}$$

要证明以上事实，只需考虑 $F_1$ 输出的序列

$$z_t = \sum_n h_1(n) x_{t-n}$$

（参看图 3.13），再将 $z_t$ 输入于 $F_2$.

$$y_t = \sum_k h_2(k) z_{t-k} \tag{3.58}$$

$$= \sum_k h_2(k) \Big( \sum_n h_1(n) x_{t-k-n} \Big). \tag{3.59}$$

令 $u=k+n$，(3.59) 可改写为

$$y_t = \sum_k \sum_u h_2(k) h_1(u-k) x_{t-u}$$

$$= \sum_u \left\{ \sum_k h_2(k) h_1(u-k) \right\} x_{t-u} \tag{3.60}$$

$$= \sum_u h_3(u) x_{t-u}, \tag{3.61}$$

其中
$$h_3(u) = \sum_k h_2(k) h_1(u-k) \tag{3.62}$$

为 $F_3$ 的 IRF. 由（3.62）可知它的 IRF 为

$$H_3(z) = \sum_u h_3(u) z^u, (z = e^{-i\omega}). \tag{3.63}$$

然后，将（3.62）代入（3.63）得

$$H_3(z) = \sum_u \left\{ \sum_k h_2(k) h_1(u-k) \right\} z^u \tag{3.64}$$

$$= \sum_k h_2(k) \left\{ \sum_u h_1(u-k) z^u \right\}. \tag{3.65}$$

令 $s=u-k$，$u=s+k$，代入（3.65）得

$$H_3(z) = \sum_k h_2(k) \left\{ \sum_s h_1(s) z^{s+k} \right\}$$

$$= \left( \sum_k h_2(k) z^k \right) \left( \sum_s h_1(s) z^s \right)$$

$$= H_2(z) H_1(z), \tag{3.66}$$

从而证明了(3.56)和(3.57)的结论.

读者不难看出：由(3.66)知滤波运算作为算子看待是可以结合，也是可以交换的，

$$F_3 = F_2 \cdot F_1 = F_1 \cdot F_2.$$

上述结果容易推广到 $n$ 个的场合. 以 $n=4$ 为例可有：

$$F = F_1 \cdot F_2 \cdot \cdots \cdot F_4$$

$$= F_1(F_2[F_3 \cdot F_4])$$

$$= F_4(F_2[F_3 \cdot F_1])$$

$$= (F_3 \cdot F_2) \cdot (F_4 \cdot F_1), \tag{3.67}$$

等等，它的 IRF 仅需由 $h_i(k)$，$i=1, 2, 3, 4$ 作多重卷积即可.

利用上述理论我们可以重新认识 $X$-11 经过的 4 步滤波手

续. 现将以上 $X$-11 的处理过程画成框图即如图 3.14 所示.

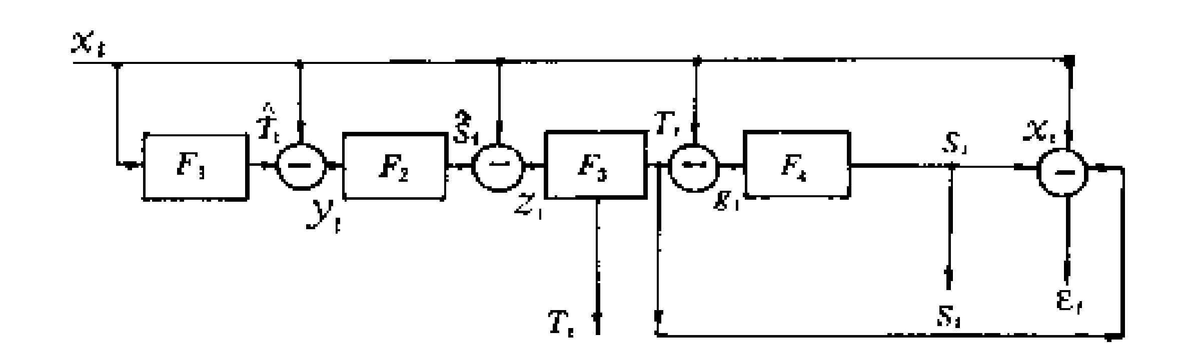



图 3.14　$X$-11 方法的整体运作框图

如果设 $I$ 为恒等算子，则生成 $T_t$ 的算子可由以下综合而得：

$$\begin{aligned} F_T x_t &= F_3[z_t] \\ &= F_3[x_t - \hat{S}_t] \\ &= F_3[x_t - F_2(y_t)] \\ &= F_3[x_t - F_2(x_t - \hat{T}_t)] \\ &= F_3[x_t - F_2(x_t - F_1 x_t)] \\ &= F_3[x_t - F_2(I - F_1)x_t] \\ &= F_3[I - F_2(I - F_1)]x_t. \end{aligned} \tag{3.68}$$

可见
$$F_T = F_3[I - F_2(I - F_1)], \tag{3.69}$$

类似地，对获得 $S_t$ 的算子 $F_s$ 亦可表为

$$F_s = F_4[I - F_T]. \tag{3.70}$$

由(3.23)—(3.25)可得

$$H_1(z) = \frac{1}{12}[1 + (z + z^{-1}) + (z^2 + z^{-2}) + \cdots + (z^5 + z^{-5})] + \frac{1}{24}(z^6 + z^{-6}). \tag{3.71}$$

由 (3.27) — (3.28) 可得

$$H_2(z) = 0.333 + 0.222[z^{12} + z^{-12}] + 0.111[z^{24} + z^{-24}]. \tag{3.72}$$

由（3.30）知，$H_3(z)$ 可具体表为

$$H_3(z) = 0.24 + 0.214(z + z^{-1}) + 0.147(z^2 + z^{-2}) + 0.066(z^3 + z^{-3}) - 0.028(z^5 + z^{-5}) - 0.019(z^6 + z^{-6}). \tag{3.73}$$

由（3.33）可得

$$H_4(z) = 0.2 + 0.2(z^{12} + z^{-12}) + 0.13(z^{24} + z^{-24}) + 0.07(z^{36} + z^{-36}). \tag{3.74}$$

将（3.71）—（3.75）代入（3.69）可得

$$H_T = H_3[1 - H_2(1 - H_1)] \tag{3.75}$$

的 73 项展式；而 $H_T$ 所对应的系数（$h_k z^{-k}$ 的系数 $\{h_k\}$）即为获得 $T_t$ 的滤波器 $F_T$ 的 IRF，由于对称性 $h_{-k}=h_k$，因而只需给出 $\{h_0, h_1, \cdots, h_{36}\}$ 即可．$F_T$ 所对应的 IRF 列于表 3.1.

| $k$ | $h_T(k)$ | $k$ | $h_T(k)$ | $k$ | $h_T(k)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0.188006 | 12 | −0.03478 | 24 | −0.01739 |
| 1 | 0.170793 | 13 | −0.0287028 | 25 | −0.0141988 |
| 2 | 0.126234 | 14 | −0.0136992 | 26 | −0.00663225 |
| 3 | 0.0719015 | 15 | 0.0039775 | 27 | 0.0020535 |
| 4 | 0.0268944 | 16 | 0.0176444 | 28 | 0.00839438 |
| 5 | 0.00654875 | 17 | 0.0221908 | 29 | 0.00983275 |
| 6 | 0.01467 | 18 | 0.020202 | 30 | 0.006734 |
| 7 | 0.0272412 | 19 | 0.0148833 | 31 | 0.00252525 |
| 8 | 0.0193556 | 20 | 0.0101056 | 32 | 0.00085562 |
| 9 | 0.0037185 | 21 | 0.0017945 | 33 | −0.0001295 |
| 10 | −0.0145688 | 22 | −0.00750175 | 34 | −0.00043475 |
| 11 | −0.0293132 | 23 | −0.0148092 | 35 | −0.00030525 |
| | | | | 36 | −0.00008787 |

表 3.1 （$F_T$ 所对应的滤波系数）

同理，由（3.70）可看出 $F_s$ 所对应的

$$H_s(z)=H_4(z)[1-H_T(z)] \tag{3.76}$$

总共有 145 项；而 $H_s(z)$ 所对应的各项系数即为 $F_s$ 的 IRF. 同样，由对称性，表 3.2 给出了 $F_s$ 所对应的 IRF. 在进行具体滤波时应自行进行对称延拓.

| $k$ | $h_s(k)$ | $k$ | $h_s(k)$ | $k$ | $h_s(k)$ | $k$ | $h_s(k)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | +0.180845 | 18 | −0.0116424 | 36 | +0.0648566 | 54 | −0.00228956 |
| 1 | −0.018763 | 19 | −0.0113346 | 37 | −0.00538442 | 55 | −0.00137011 |
| 2 | −0.0177253 | 20 | −0.0107947 | 38 | −0.00572901 | 56 | −0.000818625 |
| 3 | −0.0164107 | 21 | −0.0107023 | 39 | −0.00596088 | 57 | $-1.0878E-4$ |
| 4 | −0.0152438 | 22 | −0.0109504 | 40 | −0.00585525 | 58 | $+5.8164E-4$ |
| 5 | −0.014586 | 23 | −0.0113084 | 41 | −0.00530976 | 59 | +0.00107633 |
| 6 | −0.0138815 | 24 | +0.118445 | 42 | −0.00499996 | 60 | +0.00122872 |
| 7 | −0.013636 | 25 | −0.0115709 | 43 | −0.00434676 | 61 | $+9.93913E-4$ |
| 8 | −0.0142637 | 26 | −0.0113243 | 44 | −0.00283975 | 62 | $+4.64258E-4$ |
| 9 | −0.0161269 | 27 | −0.0108137 | 45 | −0.00046768 | 63 | $-1.43745E-4$ |
| 10 | −0.018531 | 28 | −0.0100589 | 46 | +0.00208199 | 64 | $-5.87606E-4$ |
| 11 | −0.0205692 | 29 | −0.00916293 | 47 | +0.00403818 | 65 | $-6.88293E-4$ |
| 12 | +0.178583 | 30 | −0.0083212 | 48 | +0.00471288 | 66 | $-4.7138E-4$ |
| 13 | −0.020731 | 31 | −0.00748148 | 49 | +0.00385503 | 67 | $-1.76768E-4$ |
| 14 | −0.0187614 | 32 | −0.00659109 | 50 | +0.00182114 | 68 | $-5.98938E-5$ |
| 15 | −0.0161955 | 33 | −0.00584951 | 51 | −0.00054538 | 69 | $+9.065E-6$ |
| 16 | −0.0138103 | 34 | −0.00535513 | 52 | −0.00232637 | 70 | $+3.04325E-5$ |
| 17 | −0.0122976 | 35 | −0.00512191 | 53 | −0.00283161 | 71 | $+2.13675E-5$ |
| | | | | | | 72 | $+6.15125E-6$ |

**表 3.2** （$F_s$ 所对应的滤波系数）

表 3.1 列出的 $F_T$ 所对应的 $h_T(k)$，$k=0$，1，2，…，36，其图形如图 3.15 所示.

表 3.2 所列的 $F_s$ 所对应的滤波系数 $h_s(k)$，$k=0,1,2,\cdots$，72 由图 3.16 所示.

由图 3.16 可以看出，$h_s(t)$ 只有在 $t=12$，24，36 时有较大的值，其它的值很小. 这是因为 $X$-11 考虑的是经济数据，它们往往是以 12（月）为周期，从而 $2\times12$，$3\times12$ 也是周期. 如果不是以 12 为周期，则 $X$-11 的第二步滤波系数(3.28)不为 0 的 $h_k$ 就应该随之更换.

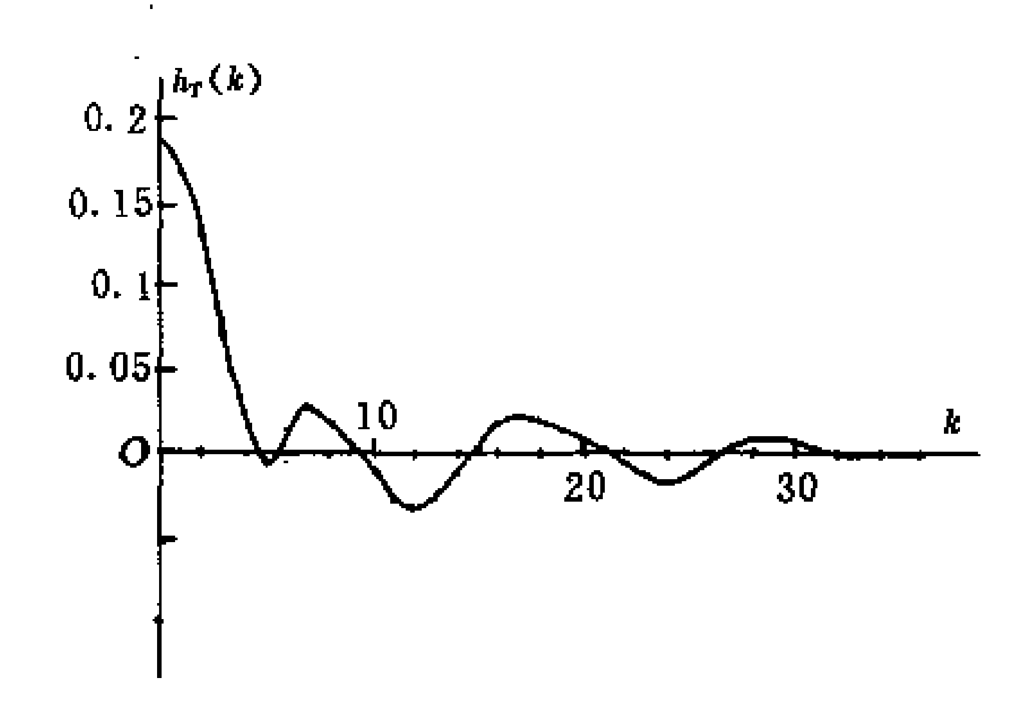



图 3.15　提取趋势项 $T_t$ 的组合滤波所对应的 IRF（表 3.1）

有了表 3.1 的 $h_T(k)$，$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…，$\pm36$，和表 3.2 的 $h_s(t)$，$t=0$，$\pm1$，…，$\pm72$，则从 $x_t$ 数据出发想获得趋势 $T_t$ 和季节项 $S_t$ 就非常方便，此时可直接滤波而得：

$$T_t=\sum_{k=-36}^{36}h_T(k)x_{t-k},\ t=36,37,\cdots,N-36. \quad (3.77)$$

$$S_t=\sum_{u=-72}^{72}h_s(u)x_{t-u},\ t=72,73,\cdots,N-73. \quad (3.78)$$

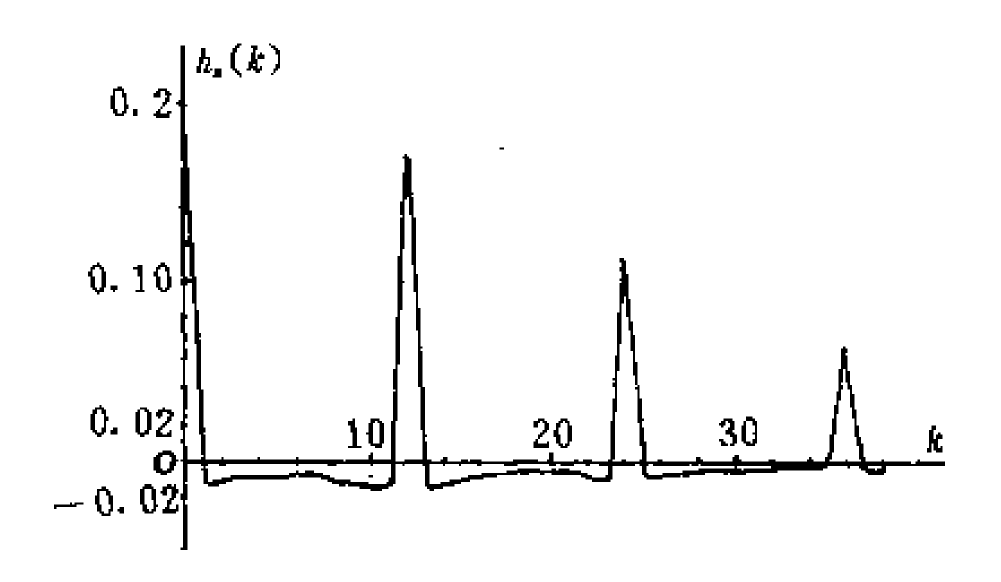



图 3.16 提取季节项 $T_t$ 的组合滤波所对应的 IRF（表 3.2）

当然，由于 $h_s(u)$，当 $u>38$ 以后很小，也可以考虑将(3.78)中的求和项缩短到［−38，38］范围内，这样可以节省一些数据.

## 2.4 用 X-11 方法来预报某车站的铁路货运量.

为了更好地挖掘铁路的货运能力，一项重要的工作是对货运的需要能有超前性的预测. 目前许多车站还不能作出中长期（数月乃至季度）的预测预报. 图 3.17 就是我国某车站自 1975—1985 铁路货运的记录图形.

由图 3.17 可以看出它有一个上升的发展趋势，此外又有明显的季节性—大家都知道，每年春节前后的货运任务是最繁重的，此外整个记录又带有随机性的，因而符合 X-11 成分的构成. 设图 3.17 的记录为 $x_t$，则仍考虑 $x_t$ 可表为

$$x_t = T_t + S_t + \varepsilon_t.$$

于是对记录 $x_t$，$t=1, 2, \cdots, 110$ 用表 3.1 和表 3.2 来提取趋势成分 $T_t$ 及季节成分 $S_t$. 其中 $\{h_T(k)\}$ 和 $\{h_s(k)\}$ 各取 36+1 项，即 $k=0, 1, 2, \cdots, 36$. 为了得到两端的结果，我

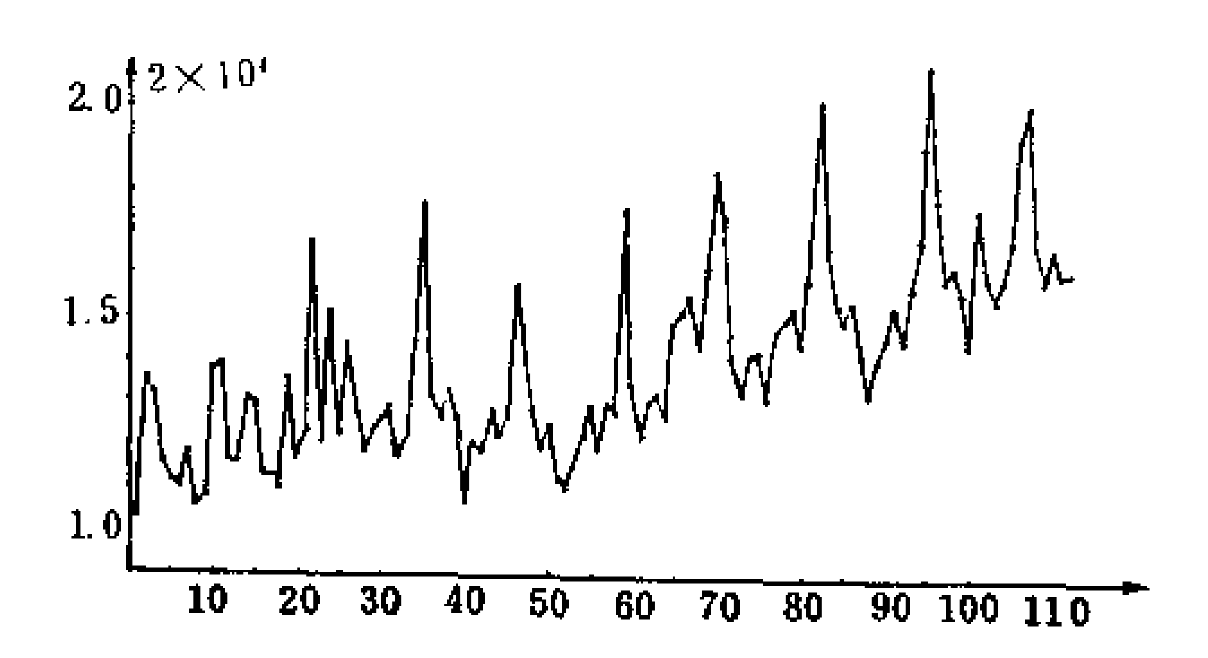



图 3.17 我国南方某车站 1975—1985 的货运量记录

们用简单的对 $x_t$ 进行平直延伸．于是可获得它的趋势 $T_t$ 和季节性成分如图 3.18 和图 3.19.

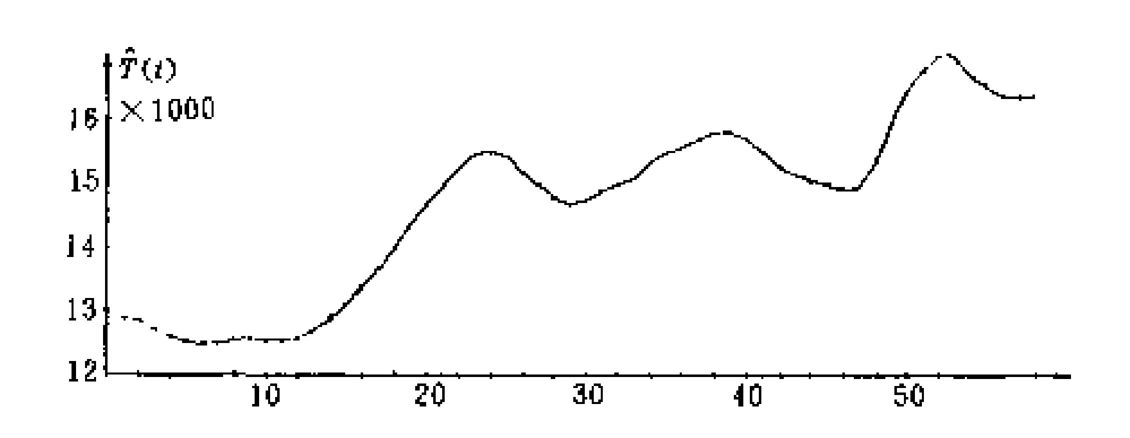



图 3.18 用 $X$-11 方法提取的铁路货运的趋势项 $T_t$

利用以上介绍的预测方法，基于以往观测数据就可以往外作预报，表 3.3 给出了 $X$-11 方法对未来 10 个月的铁路货运的预报值及与真值的比较.

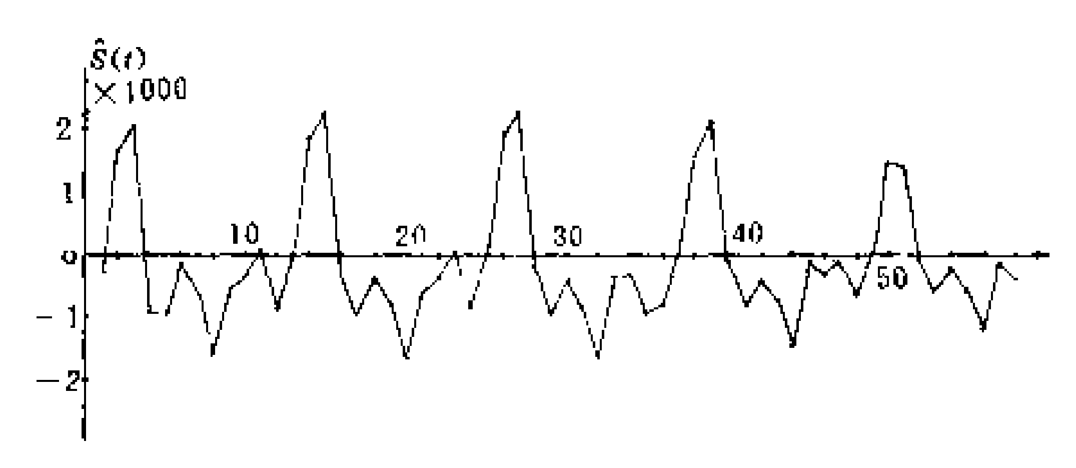



**图 3.19** 用 $X$-11 方法提取的铁路货运的季节性成分 $S_t$

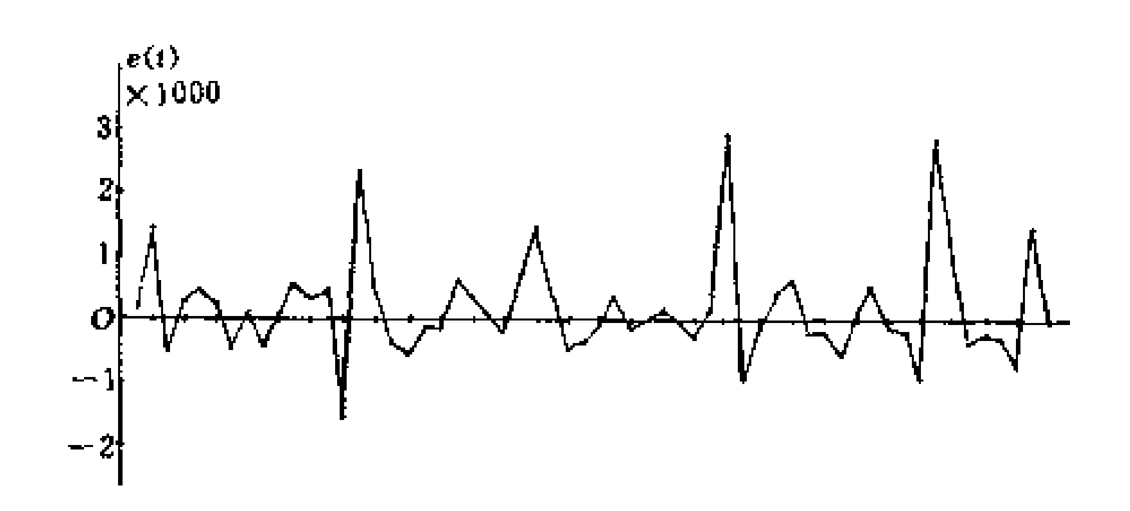



**图 3.20** 用 $X$-11 提取的不规则成分 $\varepsilon_t$

| 外推步数 $k$ | 真　　值 | 预报值 | 相对误差（%） |
|---|---|---|---|
| 1 | 15537 | 16133 | 3.8% |
| 2 | 15992 | 15559 | 2.7% |
| 3 | 16945 | 15658 | 7.6% |
| 4 | 19391 | 16180 | 16.5% |
| 5 | 20182 | 16479 | 18.3% |
| 6 | 16861 | 15774 | 6.4% |
| 7 | 15894 | 15567 | 2.1% |
| 8 | 16874 | 15971 | 5.3% |
| 9 | 16103 | 15836 | 1.6% |
| 10 | 16227 | 15531 | 4.2% |

**表 3.3**（向外预报 10 个月的值及与真值的比较）

平均预测相对误差为 6.85%，表明有相当的预报参考价

值，从表 3.3 可看出：一般讲预报误差都不大，比较大的是两项极大值，即 $k=4$ 和 $k=5$，其原因是 $X$-11 方法提取的 $S_t$，它的峰值还不够高，以至于影响了预报的峰值偏低. 另外一个原因是

$$x_t = T_t + S_t + \varepsilon_t.$$

分解中，认为 $\varepsilon_t$ 是白噪声，即认为 $\{\varepsilon_t\}$ 是相互独立同分布序列，因而预报值实质上是取

$$\hat{x}_{t+\tau} = T_{t+\tau} + S_{t+\tau}, \tag{3.79}$$

而 $\varepsilon_t$ 没有对预报作“贡献”. 如果深入地分析，图 3.20 并不是白噪声，因而也应该“参与”作预报. 当然，这样处理就会进一步提高预报精度. 只是如何对 $\varepsilon_t$ 进行建模和作预报已超出本书的范围，读者如有兴趣可参看谢（1990）的有关章节.

# 第四章　极大极小准则下的滤波

## §1　动态海洋重力仪的数据处理问题

### 1.1　动态海洋重力仪提出的难题.

在地质勘探方法中，地球物理勘探主要有三种方法：地震法、电磁法和重力法. 重力法主要是通过量测地球各位置上的地球重力加速度值的变化来了解地球的结构. 众所周知，由于地球对物体有吸引力，因而在地面上各点都有确定的重力加速度值 $g$，如 $g=980\text{cm/sec}^2$. 但不同的纬度、不同的地下结构等因素的变化使得各观测点的 $g$ 值会发生变化. 如果在某一区域内的 $g$ 值都能够标出（按一定精度的格子点上的 $g$ 值），则所有这些 $\{g\}$ 值将提供地下资源的状况. 例如，在石油勘探中，该区域的 $\{g\}$ 值就可以提供地下构造的许多信息. 早先在量测重力的仪器中多属静态重力仪—即需将该仪器平稳放置于仪器架上，测出该地点的 $g$ 值后再移动到另一地点进行量测. 我国解放后除了进行大规模陆上的物理勘探之外，在六、七十年代就开始了大面积的海上资源的勘探. 除了地震法之外，还进行了重力勘探. 其仪器大多仍是静态重力仪—即从勘探船上将该仪

器放入海中，此时停船，平稳后可读出一重力值，而后再开船移到另一地点再进行重力测量．不难看出，这种工作方式是比较花时间、进展比较缓慢的一种作业方式．原因是它使用的是静态重力仪．于是，中国工程师和地球物理勘探的专家就提出一种大胆的设想：能不能生产一种仪器，安装在勘探船上后，它能够进行自动的动态量测 $g$ 值？即：船在不停的航行过程中，仪器能够不断地输出各地点的重力值？可以设想，这种动态作业方式如能实现，其效率将远远高于静态仪的作业效率．

然而，动态仪的作业方式将遇到一个很大的难题，即如何能在强大的干扰背景上检测出重力信号的问题．原因是：勘探船在海面上航行的过程中会面对两种加速度的挑战，一种是水平加速度，另一种是，尤其在风浪中，上下颠簸产生的垂直加速度．前一种加速度，在仪器上尚可采取一些措施来消除，然而，后一种垂直加速度却无法用简单的设备来消除．大家知道，$g$ 的实质是量测一种加速度的值（cm/sec$^2$），而垂直上下，船的颠簸也产生了加速度 $g_v$，这两种加速度在船的航行中是叠加在一起的．抽象地表达，我们能够量测到的，此时是

$$g_t = g_v(t) + g_s(t). \tag{4.1}$$

其中 $g_t$ 是在 $t$ 时刻测到的混合加速度，而 $g_s(t)$ 是真正的 $t$ 时刻的地球重力加速度（简称重力信号或信号），而 $g_v(t)$ 为由于船在海面上的上下运动产生的加速度，它是由风浪引起的，与信号 $g_s(t)$ 无关的干扰．$g_v(t)$ 的大小与风浪的大小有关，在中等风浪的条件下，它的数量级大约是 30～50Gal（一个 Gal＝1 cm/sec$^2$ 加速度），而 $g_s(t)$ 的变化是非常微弱的，大约是 $m$Gal 的数量级，即 0.001Gal 的变化，二者比较可以看出：信号比干扰要弱 3～5 万倍！于是，地质工程师提出一个挑战性的问题：在（4.1）式中当 $g_v(t)$ 比 $g_s(t)$ 强 3～5 万倍时，从收到（记录到）

的 $g_t$ 中能不能检测（或分离）出我们所要的信号 $g_s(t)$？

## 1.2 解决问题的可能途径.

如果有人问：有一堆砂子，想把粗砂与细砂分开有没有办法？大家显然会说，这并不困难，这只需要设计一个合适的筛子把砂子筛一遍即可. 首先当然要说清楚，什么是"粗砂子"？比如，直径在 1mm 以上的称为粗砂，小于 1mm 的称为细砂. 于是，我们可以设计一个筛子，其直径为 1mm，此时若将砂子筛一遍，细砂可以通过，粗砂过不了筛网自然就被分离出来.

同样的思路可用于信号分析. 设想 $x_t$，$t=0$，$\pm1$，$\pm2$，…是信号序列，它通过线性系统 $\mathscr{L}$，它的 IRF 为 $h_k$，$k=0$，$\pm1$，$\pm2$，…. 假定 $\{x_t\}$ 和 $\{h_k\}$ 满足适当的数学条件，则 $x_t$ 通过 $\mathscr{L}$ 的输出 $y_t$ 可表为

$$y_t = \sum_k h_k x_{t-k}. \tag{4.2}$$

对 $y_t$，(4.2) 是时域上的表示，（参看第二章的 (2.40)），然而对 $y_t$ 也可以有频域上的表示.

首先，取 $x_t$，$h_k$ 的富氏变换

$$X(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_k x_k e^{-ik\omega},\ -\pi \leqslant -\omega \leqslant \pi. \tag{4.3}$$

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_l h_l e^{-i\omega l},\ -\pi \leqslant \omega \leqslant \pi, \tag{4.4}$$

则

$$x_t = \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega, \tag{4.5}$$

$$h_k = \int_{-\pi}^{\pi} H(\omega) e^{i\omega k} d\omega. \tag{4.6}$$

将 (4.5) 代入 (4.2) 可得

$$y_t = \sum_k h_k \left( \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) e^{i\omega(t-k)} d\omega \right)$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\left( \sum_k h_k e^{-i\omega k} \right) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega)\left( \frac{1}{2\pi} \sum_k h_k e^{-i\omega k} \right) e^{i\omega t} d\omega \tag{4.7}$$

$$= 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega. \tag{4.8}$$

其中（4.7）括号部分用（4.4）代替导出（4.8）式.

（4.8）式中 $X(\omega)$ 是输入信号的富氏变换，称为"频谱"，$H(\omega)$ 则是系统 $\mathscr{L}$ 的 FRF. 设想信号 $x_t$ 对应的 $X(\omega)$ 是集中在区间 $I \subset [-\pi, \pi]$ 上，即

$$X(\omega) = 0, \ \omega \overline{\in} I. \tag{4.9}$$

又令

$$H(\omega) = \begin{cases} 1/2\pi, & \text{当 } \omega \in I, \\ 0, & \text{当 } \omega \overline{\in} I, \end{cases} \tag{4.10}$$

则（4.8）变成

$$y_t = 2\pi \int_{-\pi}^{\pi} X(\omega) H(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= 2\pi \int_I X(\omega) \left( \frac{1}{2\pi} \right) e^{i\omega t} d\omega$$

$$= \int_I X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = x_t, \tag{4.11}$$

表明 $\mathscr{L}$ 的输出即为 $x_t$ 本身.

进一步地说，如果 $x_t$ 中包含有两个成分

$$x_t = S_t + n_t, \ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{4.12}$$

其中 $S_t$ 为信号，$n_t$ 为干扰，它们的频谱分别为

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_t S_t e^{-it\omega},$$

$$N(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_t n_t e^{-it\omega}. \tag{4.13}$$

如果它们满足

$$S(\omega)\cdot N(\omega)=0,\ -\pi\leqslant\omega\leqslant\pi, \tag{4.14}$$

例如，

$$S(\omega)=0,\omega\overline{\in}I_s,$$

$$N(\omega)=0,\omega\overline{\in}I_N, \tag{4.15}$$

且（见图 4.1）

$$I_s\cap I_N=\varnothing. \tag{4.16}$$

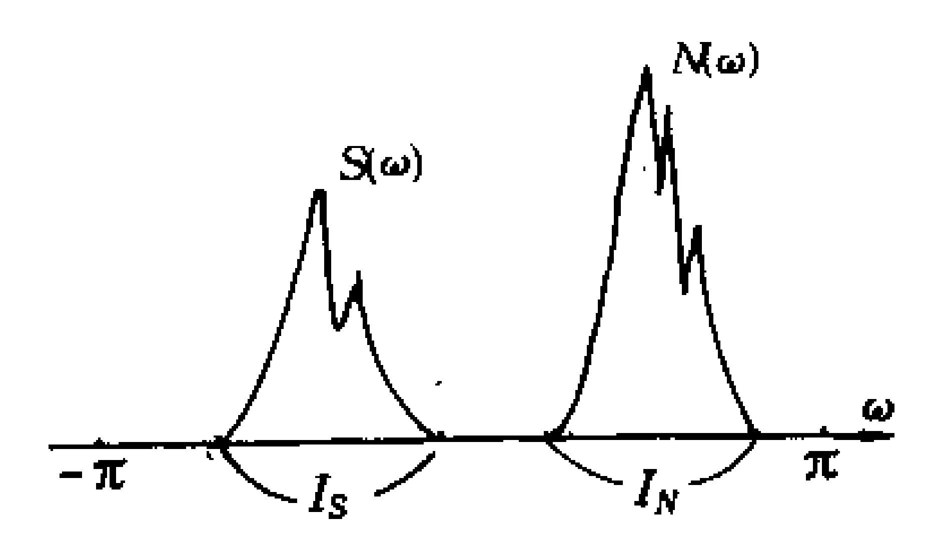



图 4.1 具有不相互重叠频谱的信号和噪音

为了要在 $x_t$ 中分离出 $S_t$，则可设计

$$H(\omega)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi}, & \omega\in I_s,\\ 0, & \omega\overline{\in}I_s,\end{cases} \tag{4.17}$$

于是，由 $\mathscr{L}$ 的线性性质，将 $x_t$（4.12）输入于 $\mathscr{L}$ 时，可得

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(x_t)&=\mathscr{L}(S_t+n_t)\\&=\mathscr{L}(S_t)+\mathscr{L}(n_t).\end{aligned} \tag{4.18}$$

而

$$\mathscr{L}(n_t)=2\pi\int_{-\pi}^{\pi}N(\omega)H(\omega)e^{i\omega t}d\omega \tag{4.19}$$

根据（4.15）的条件 $N(\omega)\cdot H(\omega)=0$，从而

$$\mathscr{L}(n_t)\equiv 0, \tag{4.20}$$

又利用（4.11）的结果

$$\mathscr{L}(x_t)=\mathscr{L}(S_t)=S_t, \tag{4.21}$$

表明，将（4.12）的混合序列 $x_t$ 输入于具（4.17）的FRF的线性系统 $\mathscr{L}$，其输出即为所求的信号 $S_t$ 而将干扰 $n_t$ 完全消除. 此方法，理论上讲不管 $x_t$ 中 $n_t$ 比 $S_t$ 的强度大多少倍，从 $x_t$ 中检测 $S_t$ 弱信号都是可能的.

以上是从理论上指出了一条可能的途径. 即用滤波器来过滤噪声. 至于在多大程度上可以把噪声滤掉，恢复原来的信号，取决于许多条件，例如条件（4.14）就是一条比较严的条件. 如果 $S(\omega)$ 和 $N(\omega)$ 有重叠部分，则用（4.17）的滤波也不可能恢复信号，这时只能不得已求其次，即在引入某种准则之下，使得信号被恢复得"尽可能的好". 于是，不同的准则就导致不同的效果. 此外，以上讨论的是信号和噪声可以用（4.12），（4.13）来表示一即认为它们是"确定型"的函数序列. 在许多实际问题中，信号 $S_t$ 和噪声 $n_t$ 往往不是"确定型"的而是随机过程或随机序列（参看第一章的有关章节）. 此时如何从 $x_t=S_t+n_t$ 中恢复 $S_t$ 就是一个相当难的数学问题. 这当然已超出本书的范围，有兴趣的读者可参看谢（1990）的有关章节.

## §2 极大极小准则下的滤波器的FRF

### 2.1 理想FRF在时域上的滤波问题.

在上一节中，我们已介绍了从理论上分析如何用具有（4.17）FRF的滤波器来过滤噪声，使信号 $S_t$ 得以恢复. 然而，在实现滤波时，能提供的是 $x_t$ 序列，$t=1, 2, \cdots, N$，因而滤波公式多采用

$$y_t = \sum_k h_k x_{t-k}, \qquad (4.22)$$

而不用 $$y_t = 2\pi\int_{-\pi}^{\pi} H(\omega)X(\omega)e^{it\omega}d\omega. \tag{4.23}$$
并且由于（4.22）中对 $k$ 的求和也不可能是“无穷多项”，因为 $x_t$ 观测序列总是有限的。这就表明在实用中我们必须对 $\{h_k\}$ 进行“截尾”，（4.22）变成

$$y_t = \sum_{k=-n}^{n} h_k x_{t-k}, \tag{4.24}$$

这样一来我们实用的滤波器的 FRF 就不是由 $\{h_k\}$ 无穷项组成的

$$H(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-\infty}^{\infty} h_k e^{-ik\omega}, \tag{4.25}$$

而是

$$H_n(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} h_k e^{-ik\omega}. \tag{4.26}$$

显然，(4.26) 的性能好坏依赖于项数 $n$，也依赖于 $\{h_k\}$ 的收敛速度，如果 $h_k$ 收敛得慢，而且项数 $n$ 又不足够大，则显然 $H_n(\omega)$和 $H(\omega)$可能相去甚远，从而使滤波效果大打折扣.

例如，我们有信号

$$S_t = 0.1\cos(2\pi\frac{t-1}{10}),\ t = 1,2,\cdots \tag{4.27}$$

干扰为

$$n_t=\cos\left(2\pi\frac{t-1}{3}\right)+\cos\left(2\pi\frac{t-1}{5}\right),\quad t=1,2,\cdots \tag{4.28}$$

而可利用的观测为

$$x_t = S_t + n_t. \tag{4.29}$$

从信号 $S_t$ 和 $n_t$ 的“频谱”看，它们的谐波成分是“分离”的，如图 4.3 所示.

由（4.17）的思想，我们设计一滤波器的 FRF 如（4.30）式，

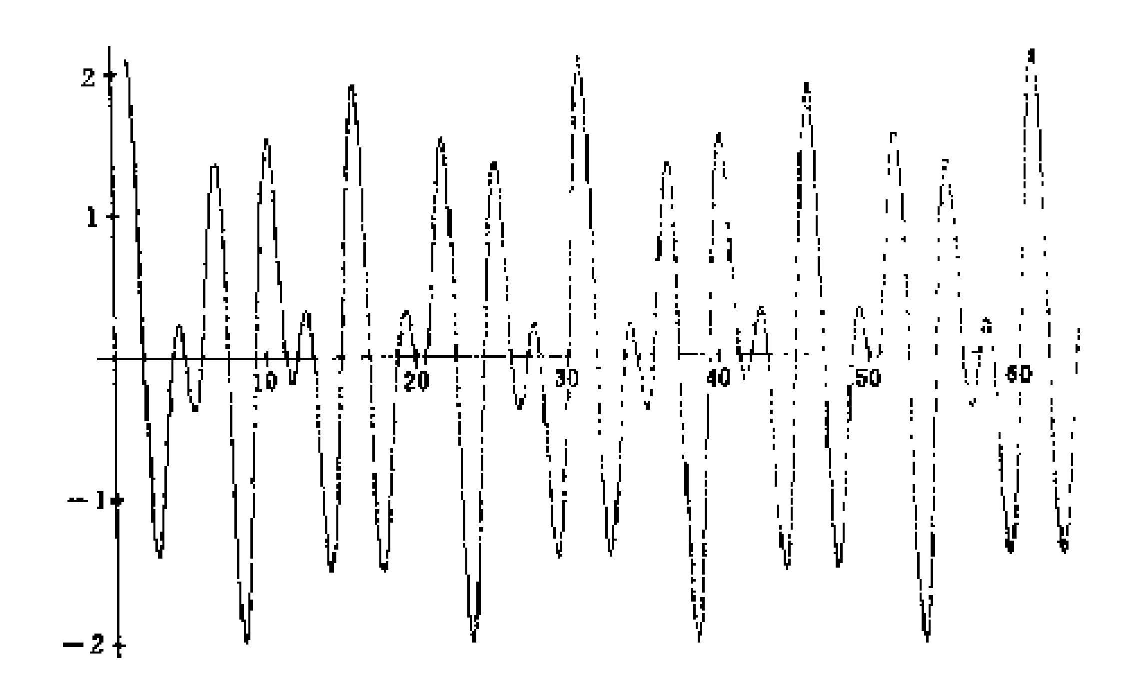



图 4.2　$X_t=S_t+n_t$ 的图形

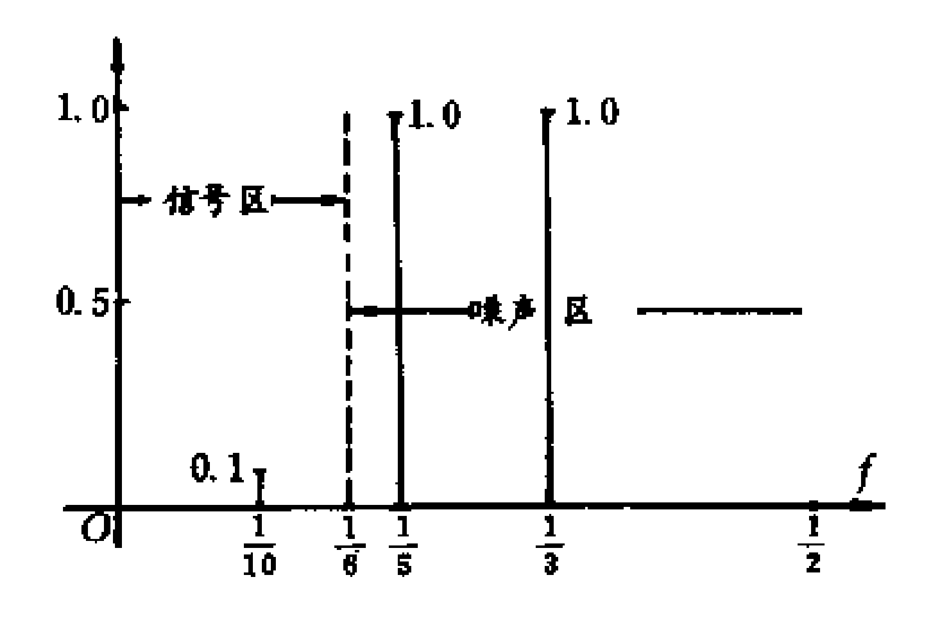



图 4.3　信号 $s_t$ 和噪声 $n_t$ 的谐波成分是分离的

$$H(\omega)=\begin{cases}1, & 0\leqslant|\omega|\leqslant 2\pi f_0,\quad f_0=\dfrac{1}{6},\\ 0, & \text{否则},\end{cases}\tag{4.30}$$

则它对应的 IRF 为（见（4.6））

$$h_k = \int_{\pi}^{\pi} H(\omega) e^{ik\omega} d\omega$$

$$= \int_{-\frac{2\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{6}} e^{ik\omega} d\omega = 2\int_0^{\frac{2\pi}{6}} \cos(k\omega) d\omega$$

$$= 2\,\frac{\sin(\frac{\pi}{3}k)}{k}. \tag{4.31}$$

它满足

$$h_{-k} = h_k,\ k = 1,2,\cdots \tag{4.32}$$

$\{h_k\}_0^{64}$ 的图形如图 4.4 所示.

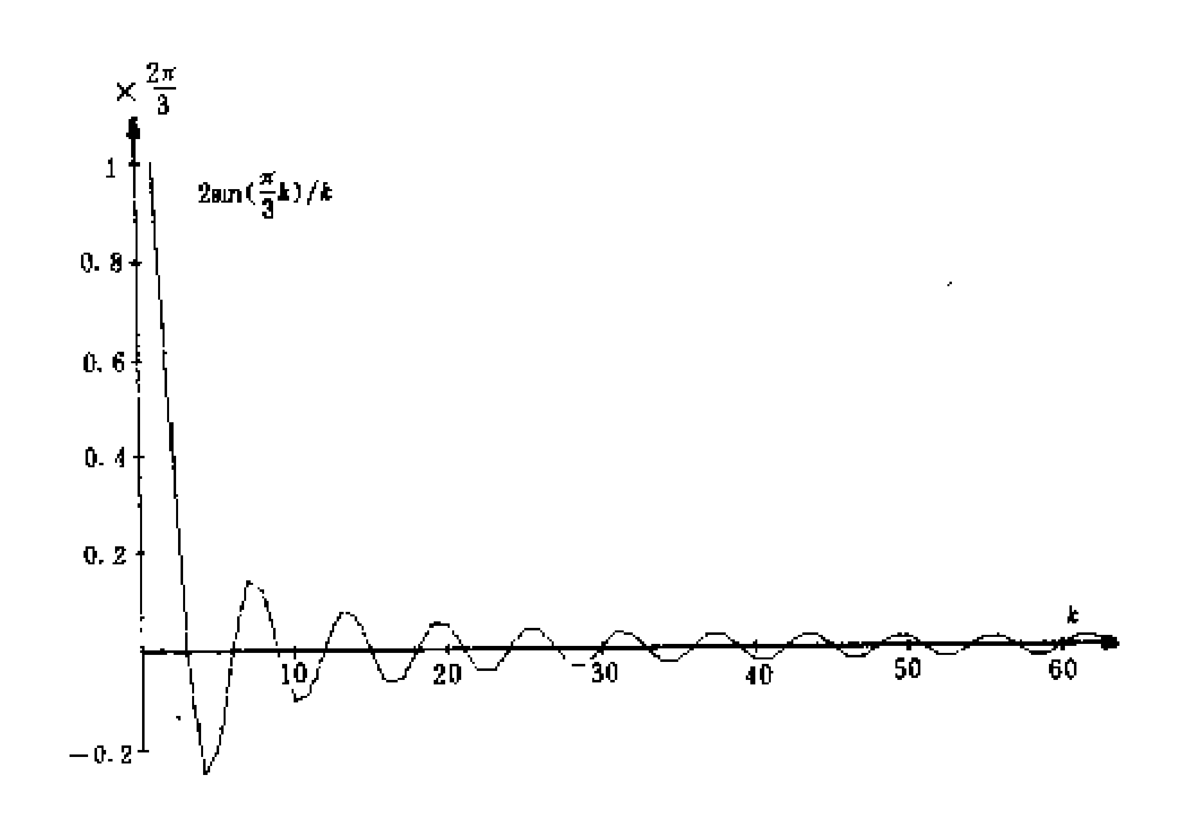



**图 4.4** 理想 FRF 所对应的 IRF

由截断的 $\{h_k\}_0^{64}$，其对应的 $H_n(\omega)$，$n=64$，是

$$H_n(\omega) = \frac{1}{2\pi}\sum_{-64}^{64} h_k e^{-ik\omega}$$

$$= \frac{h_0}{2\pi} + 2\,\frac{1}{2\pi}\sum_{k=1}^{64} h_k \cos k\omega$$

$$= \frac{h_0}{2\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{64} \frac{\sin\left(\frac{k}{3}\pi\right)}{k} \cos k\omega. \qquad (4.33)$$

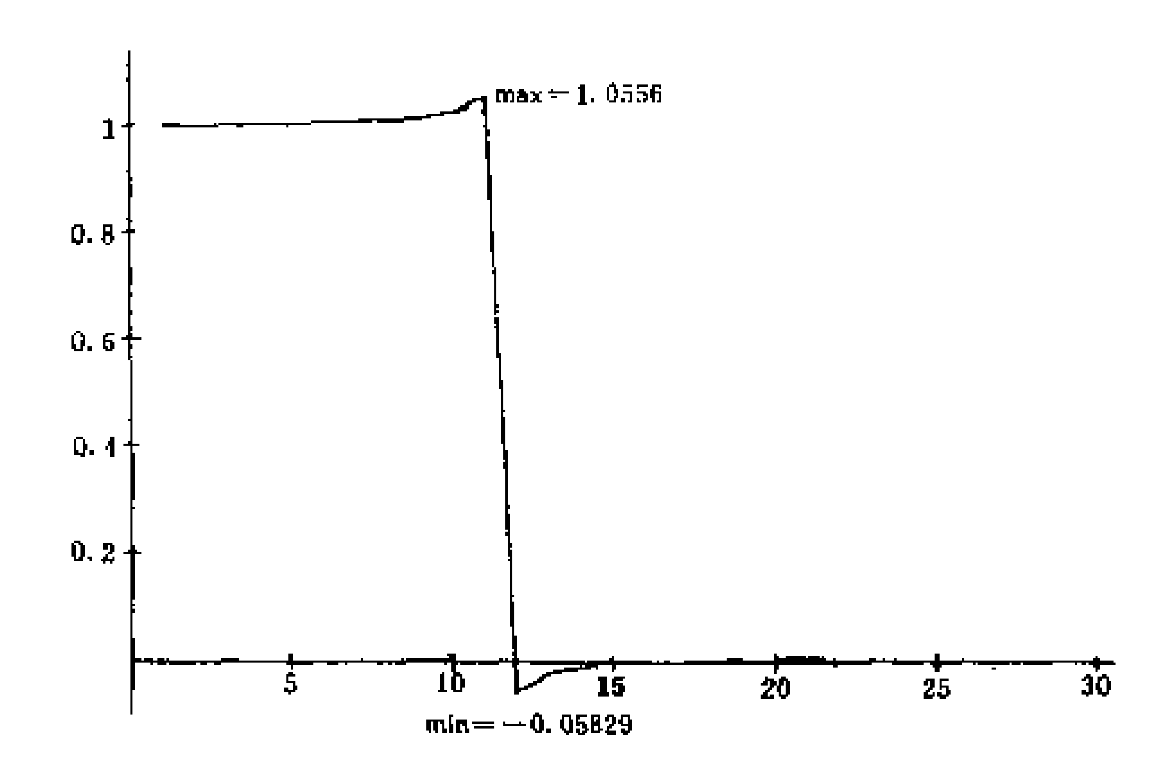



图 4.5　$n=64$ 截断型的 FRF

利用（4.31）和（4.32）可以对图 4.2 所对应的 $x_t$ 进行滤波

$$y_t = \sum_{k=-64}^{64} h_k x_{t-k}, \qquad (4.34)$$

这样可以得到图 4.6 的结果.

读者比较图 4.2 和图 4.6 的结果可以看出 $y_t$ 图形中已经没有图 4.2 那么多"弯"了. 也就是说经过（4.34）的滤波（其中 $h_k$ 由（4.31）确定），"高频"成分被"滤"掉了. $y_t$ 出现比较像 $S_t$ 的波形，但是和真正的 $S_t$ 相比（见图 4.7）仍然有较大的差别.

由图 4.3 和（4.30）的设计看，由（4.21）理论上讲 $y_t$ 与 $S_t$ 应该很接近，为何图 4.6 与图 4.7 差别较大呢？原因就在于

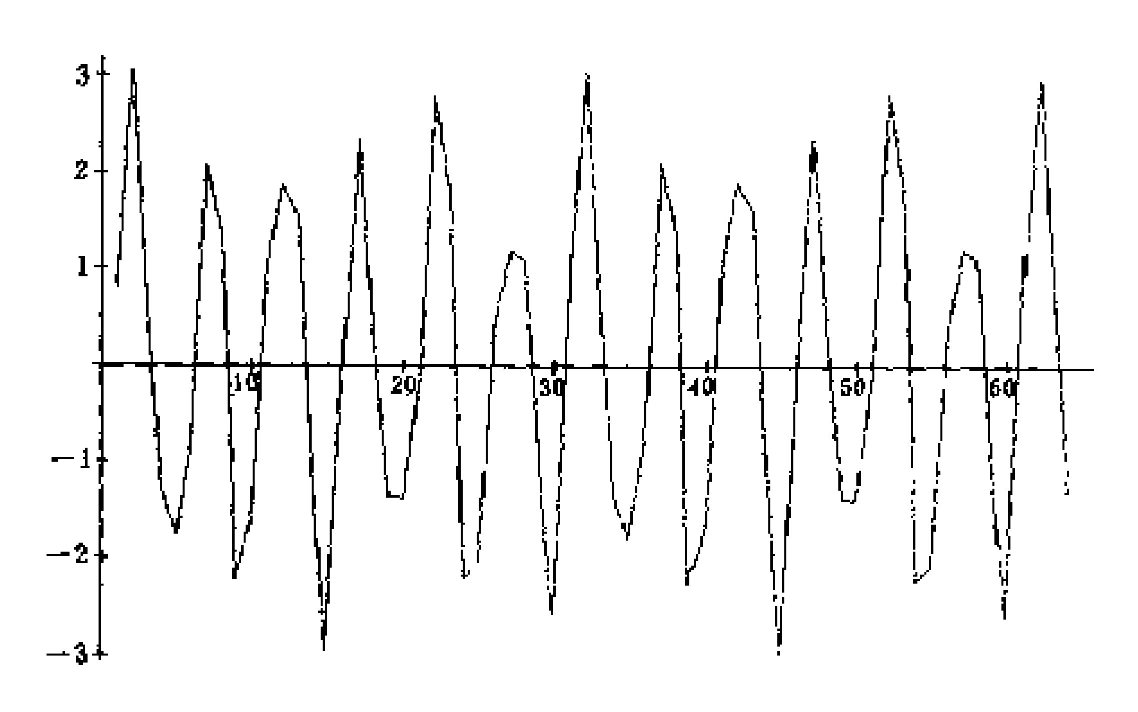



图 4.6 对混合序列 $X_t=S_t+n_t$ 运用截断滤波（4.34）的结果 $y_t$

实际上由于我们的滤波(4.34)是有限项，$n=64$，虽然已是129项滤波，但由于（4.31）函数 $h_k$ 在 $k\to\infty$时收敛太慢以至于 $H_n(\omega)$ 的图形(图 4.5)与理想的矩形 FRF(4.30)有相当的差别，所以滤波效果是不好的.

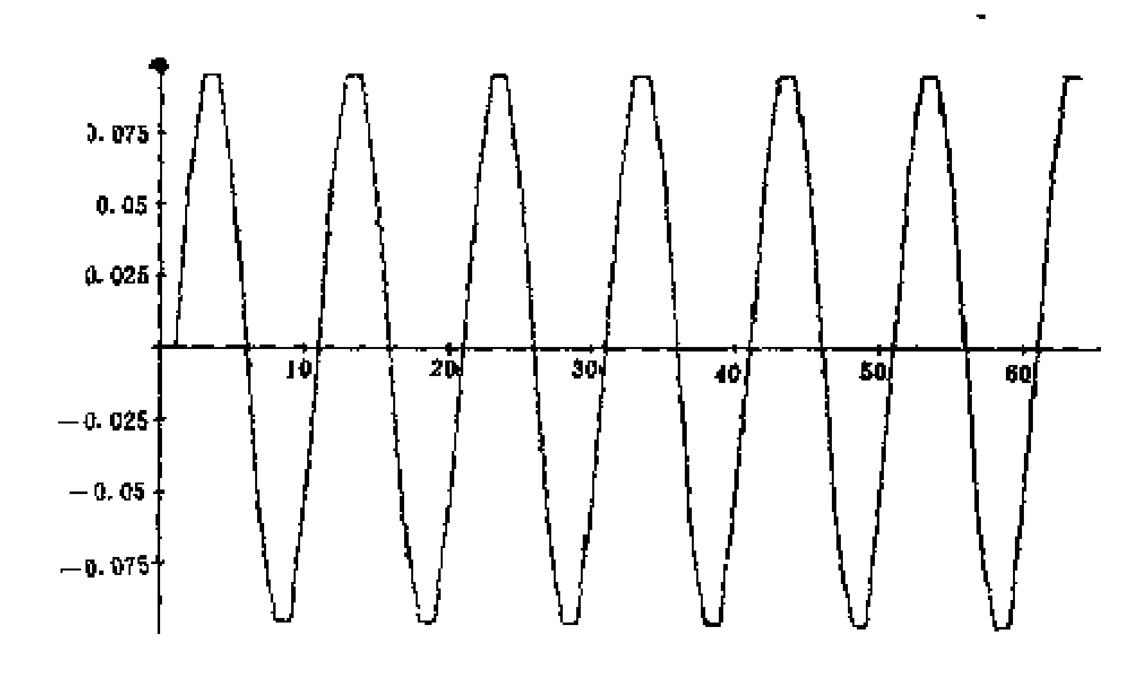



图 4.7 $S_t=0.1\cos(2\pi(t-1)/10)$ 的图形

## 2.2 极大极小准则下的滤波.

在地球物理勘探中，地球的重力信号，如果以通常海上航行速度来看，重力信号的变化是非常缓慢的，而海浪的变化相比之下要快得多. 在我国的东海海面海浪的周期大约 3～5 秒，而正常航速下地球重力的信号变化大多比 40 秒还要长. 因此，海浪的谐波成分可视为是"高频"的，短周期的，而重力信号可视为是"长周期"的或低频的. 而且信号与干扰频谱上相隔比较远，因而从理论上似应可视为满足（4.14）条件. 也就是说理论上可以用（4.17）型的 $H(\omega)$ 来提取重力信号. 然而，事实证明：由于海浪干扰的强度比重力信号高 5 万～10 万倍，甚至取 $n=512$，即进行 1025 项滤波

$$y_t = \sum_{-512}^{512} h_k x_{t-k}. \tag{4.35}$$

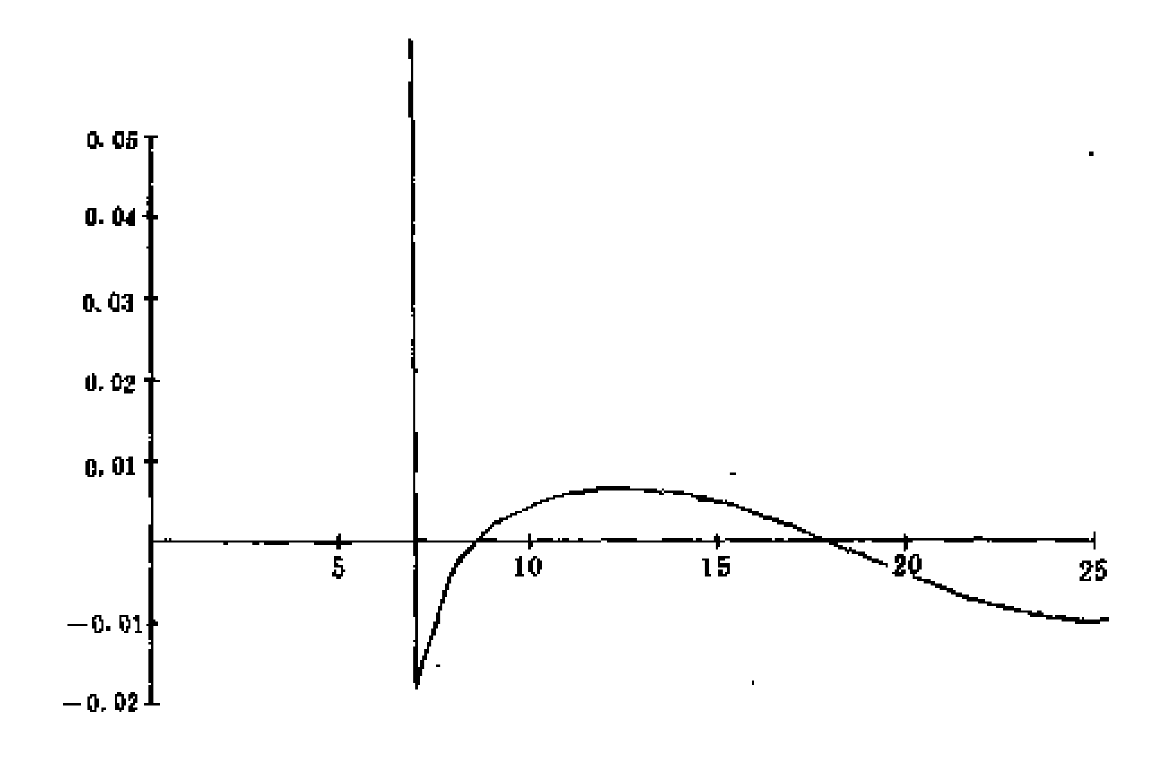



图 4.8　$n=64$，$H_n(\omega)$ 尾部的起伏

其误差仍在数百倍的数量级. 归根结底就是（4.31）这种$\sin x/x$

的 IRF 在 $x\to\infty$ 时收敛速度太慢的原因，以至于在 $H_n(\omega)$ 的尾部有较大的起伏. 图 4.8 是 $n=64$，$H_n(\omega)$ 在尾部的放大图形，其中

$$H_n(\omega)=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=-64}^{64}2\,\frac{\sin\left(\frac{\pi}{3}k\right)}{k}\cos(\omega k). \qquad (4.36)$$

表 4.1 是 $n=64$ 和 $n=128$，$H_n(\omega)$ 对应(4.36)的数值，图 4.9 是 $n=128$ 时 $H_n(\omega)$ 的尾部起伏图形.

| $k$ | $n=64$, $H_n(\omega)$ | $n=128$, $H_n(\omega)$ | $k$ | $n=64$, $H_n(\omega)$ | $n=128$, $H_n(\omega)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.00015 | 1.00000 | 13 | 0.00584 | 0.00045 |
| 1 | 1.00163 | 0.99978 | 14 | 0.00480 | 0.00142 |
| 2 | 1.00408 | 0.99895 | 15 | 0.00339 | 0.00099 |
| 3 | 1.00795 | 0.99885 | 16 | 0.00168 | −0.00037 |
| 4 | 1.01562 | 1.00189 | 17 | −0.00204 | −0.00140 |
| 5 | 1.05565 | 1.03214 | 18 | −0.00216 | 0.00108 |
| 6 | −0.01789 | −0.00519 | 19 | −0.00407 | 0.00036 |
| 7 | −0.00318 | 0.00149 | 20 | −0.00583 | 0.00162 |
| 8 | 0.00172 | 0.00283 | 21 | −0.00735 | 0.00140 |
| 9 | 0.00430 | 0.00146 | 22 | −0.00853 | −0.00042 |
| 10 | 0.00575 | −0.00065 | 23 | −0.00932 | −0.00249 |
| 11 | 0.00639 | −0.00171 | 24 | −0.00963 | −0.00274 |
| 12 | 0.00639 | −0.00107 | 25 | −0.00903 | 0.00104 |

表 4.1

以下我们来分析一下 (4.36) 的尾部泄漏引起的干扰有多大. 设想，为简单分析起见，噪声的频谱 $X(\omega)=C/2\pi$(常数)，而且由图 4.3，我们考虑在 $\left[\frac{2\pi}{6},\ \frac{2\pi}{3}\right]$ 范围内的泄漏. 由 (4.8) 知输出

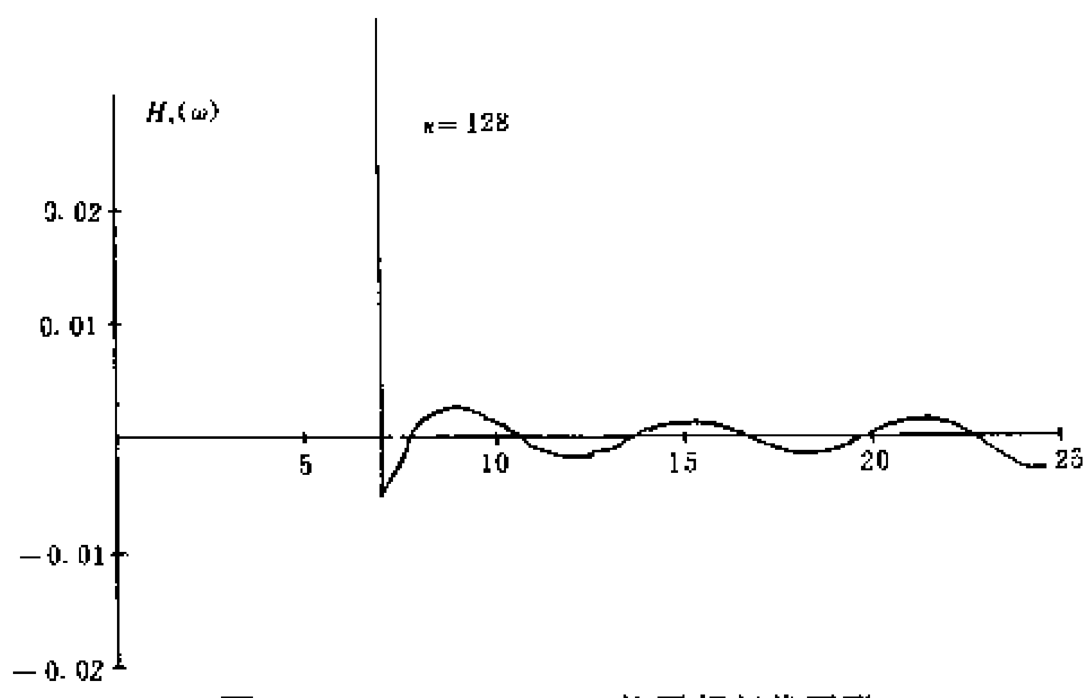



**图 4.9　$n=128$, $H_n(\omega)$ 的尾部起伏图形**

$$N_0 = 2\pi\int_{\frac{2\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} X(\omega)H_n(\omega)d\omega$$

$$= C\sum_{k=-n}^{n}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{2\pi}{3}}\frac{2\sin\left(\frac{\pi k}{3}\right)}{k}\cos(k\omega)d\omega\right)$$

其数值和项数 $n$ 有关，表 4.2 是 $|N_0/C|$ 的值.

| $n$ | 32 | 64 | 96 | 128 | 256 | 512 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\lvert N_0/C\rvert$ | 0.163627 | 0.16121 | 0.16045 | 0.16003 | 0.15941 | 0.15911 |

**表 4.2**

图 4.10 是 $|N_0/C|$ 随 $n$ 的增加而递减的图形.

由表 4.2 和图 4.10 可以看出因 $H_n(w)$ 的尾部泄漏出干扰 $|N_0/C|$ 还占很大的比例. 如果 $|C|$ 很大，即噪声很强时 $|N_0|$ 必然很严重！而由表 4.2 和图 4.10 可以看出，由于 $h_t$ 收敛很慢，当 $n=32$ 变到 $n=512$，$|N_0/C|$ 变化并不大. 表明一味地用增加滤波的项数 $n$ 是不合算的.

因此，基于以上的分析，针对地球重力信号是变化非常缓

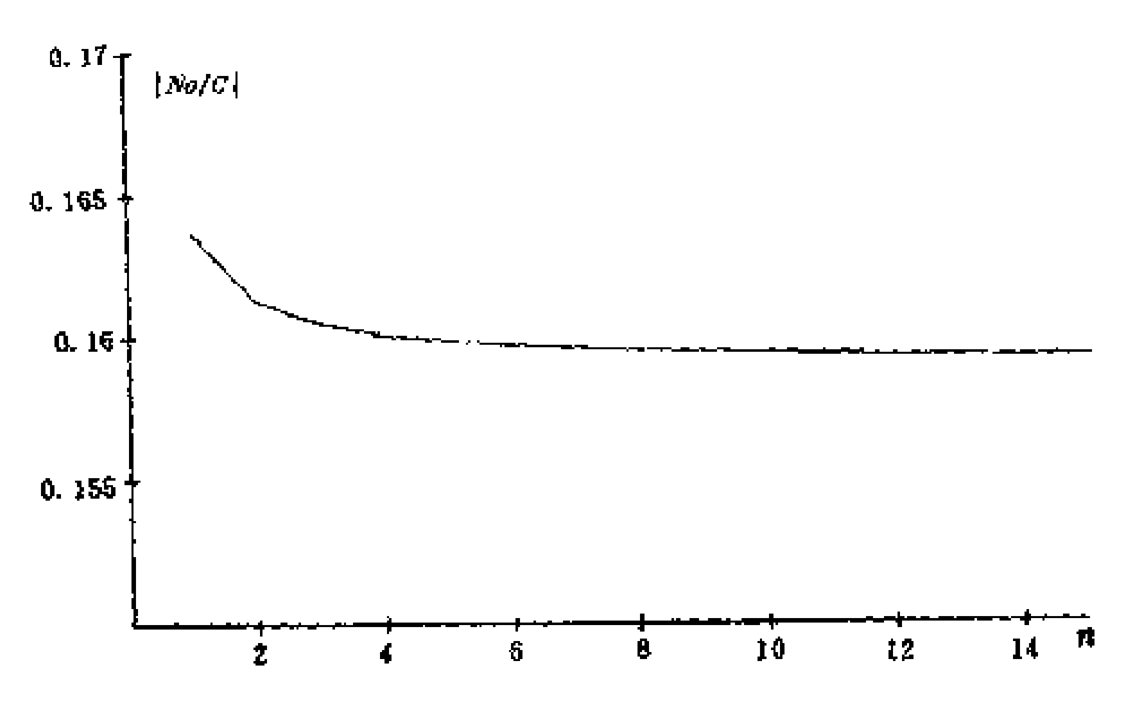



图 4.10 $|N_0/C|$随 $n$ 变化的图形

慢的这一特点，我们特别有针对性地提出以下的极大极小准则下的滤波器的设计.

(1) 取滤波系数 IRF 为 $\{h_k, k=\pm 1, \pm 2, \cdots, \pm N\}$. 它是实系数的，并满足

$$h_{-k}=h_k. \tag{4.37}$$

(2) $\{h_k\}$. 所对应的 FRF 是*

$$H(\omega)=\sum_{k=-N}^{N}h_k\cos k\omega,\quad 0\leqslant\omega\leqslant\pi. \tag{4.38}$$

并 $$H(0)=1. \tag{4.39}$$

(3) 对于误差 $\delta>0$ 和截止频率 $\alpha>0$，我们要寻求最优的 $H^*(\omega)$，记为 OFRF，它满足

$$\max_{\alpha\leqslant\omega\leqslant\pi}|H^*(\omega)|\leqslant\inf_{\{h_k\}}\left[\max_{\alpha\leqslant\omega\leqslant\pi}|H(\omega)|\right]\leqslant\delta, \tag{4.40}$$

其中 $\{h_k\}$ 是一切满足 (4.37) — (4.39) 的有限项的 IRF.

---

* 为简明起见我们这里省去了 $\frac{1}{2\pi}$的因子.

需要说明的是：我们不能要求 $\delta=0$，否则由（4.40）将会出现

$$\delta \geqslant \max_{\alpha\leqslant\omega\leqslant\pi}|H^*(\omega)| \geqslant |H^*(\omega)| \equiv 0, \alpha\leqslant\omega\leqslant\pi. \tag{4.41}$$

然而由

$$\left|\sum_{k=-N}^{N} h_k^* \cos k\omega\right| \equiv 0, 一切\ \alpha\leqslant\omega\leqslant\pi, \tag{4.42}$$

则必导致 $h_k^* \equiv 0$，$k=0$，$\pm1$，…，$\pm N$. (4.43)

为说明这一事实，只需看看 $N=2$ 的场合. 由（4.42）及（4.37），（4.42）可改写为.

$$h_0^* + 2h_1^*\cos\omega + 2h_2^*\cos2\omega = 0. \tag{4.44}$$

取 $\omega_1$，$\omega_2\in[\alpha, \pi]$，则（4.44）变成

$$\begin{bmatrix} 1 & \cos\omega_1 & \cos2\omega_1 \\ 1 & \cos\omega_2 & \cos2\omega_2 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_0^* \\ 2h_1^* \\ 2h_2^* \end{bmatrix} \equiv 0. \tag{4.45}$$

然而（4.45）的行列式

$$D = \cos\omega_2 - \cos2\omega_1 + \cos\omega_1\cos2\omega_2 - \cos\omega_2\cos2\omega_1 + \cos2\omega_2 - \cos\omega_1. \tag{4.45'}$$

它是 $(\omega_1, \omega_2)$ 的连续函数，在 $[\alpha, \pi]$ 内总存在二个点 $(\omega_1^0, \omega_2^0)$ 使 $D>0$. 例如，当 $\alpha<\frac{\pi}{6}$时，可取 $\omega_1^0=\frac{\pi}{2}$，$\omega_2^0\doteq\frac{\pi}{6}$，则

$$D = 3.2320 > 0.$$

即(4.45)表明 $h_0^*=h_1^*=h_2^*=0$. 类似的方法可以证明由(4.42)式可导出(4.43). 也就是说，当我们要求 $\delta=0$，必导出 $h_k^*\equiv0$，$k=0$，$\pm1$，…，$\pm N$ 这种无意义的结果.

然而满足以上（1），（2），（3）的 $\{h_k\}$ 是否对任给的 $\alpha$、$\delta>0$ 都存在？若存在，如何去求这些 IRF？

## 2.3 极大极小准则下最优滤波 IRF 的解.

为了寻求满足（1）、（2）、（3）的 OFRF，令

$\mathscr{H}=\{H(\omega):H(\omega)=\sum_{k=-N}^{N}h_k\cos k\omega, h_k=h_{-k}, h_k$ 为实系数,并 $|H(\omega)|\leqslant 1, \alpha\leqslant\omega\leqslant\pi.\}$ (4.46)

显见,若有 $\hat{H}\in\mathscr{H}$ 并且

$$|\hat{H}(0)|=C\geqslant|H(0)|, \forall H\in\mathscr{H} \tag{4.47}$$

成立，则 $C>0$.

事实上，取 $\tilde{h}_0=1$，$\tilde{h}_k=0$，$k\neq0$，则 $\tilde{H}(\omega)=1\in\mathscr{H}$ 由于（4.47）对一切 $\mathscr{H}$ 中函数成立，故

$$|\hat{H}(0)|=C\geqslant|\tilde{H}(0)|=1>0. \tag{4.48}$$

以下三条定理彻底地解决了求 OFRF 的问题.

**定理 4.1** 设 $\{\hat{h}_k, k=0, \pm1, \pm2, \cdots, \pm N\}$ 满足(4.37)并 $\hat{H}(\omega)\in\mathscr{H}$ 并使

$$|\hat{H}(0)|=c\geqslant|H(0)|, \forall H\in\mathscr{H}$$

成立. 令

$$\tilde{h}_k=\frac{1}{C}\hat{h}_k,\ k=0, \pm1, \cdots, \pm N, \tag{4.49}$$

则 $\{\tilde{h}_k\}$ 是最优 IRF，只是

$$\delta=\frac{1}{C}. \tag{4.50}$$

**证明:** 令

$$\tilde{H}(\omega)=\sum_{k=-N}^{N}\tilde{h}_k\cos k\omega,\ 0\leqslant\omega\leqslant\pi. \tag{4.51}$$

则

$$|\tilde{H}(0)|=\left|\sum_{k=-N}^{N}\frac{\hat{h}_k}{C}\right|=\frac{1}{C}\left|\sum_{k=-N}^{N}\hat{h}_k\right|$$

$$= \frac{|\hat{H}(0)|}{C} = 1.$$

并且 $$|\hat{H}(\omega)| = \left|\sum_{k=-N}^{N} \hat{h}_k \cos k\omega\right| \leqslant 1, 0 < \alpha \leqslant \omega \leqslant \pi, \tag{4.52}$$
因为 $\hat{H}(\omega) \in \mathscr{H}$.

因此,

$$|\tilde{H}(\omega)| = \left|\sum_{k=-N}^{N} \tilde{h}_k \cos k\omega\right| = \frac{1}{C}\left|\sum_{k=-N}^{N} \hat{h}_k \cos k\omega\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{C}. \tag{4.53}$$

今令 $$D = \operatorname*{Max}_{\alpha\leqslant\omega\leqslant\pi} |\tilde{H}(\omega)|, \tag{4.54}$$

则 $$D \leqslant \frac{1}{C}, \tag{4.55}$$

并满足以下不等式

$$\{\inf_{\{h_k\}} \operatorname*{Max}_{\alpha\leqslant\omega\leqslant\pi} |H(\omega)|\} = \delta \leqslant D \leqslant \frac{1}{C}. \tag{4.56}$$

假设满足 (1) — (3) 的最优的 IRF 是 $\{h_k^*\}$，可令

$$\bar{h}_k = \frac{1}{\delta} h_k^*, \ k = 0, \pm 1, \cdots, \pm N, \tag{4.57}$$

则 $$|\bar{H}(\omega)| = \left|\sum_{k=-N}^{N} \bar{h}_k \cos k\omega\right| = \frac{1}{\delta}\left|\sum_{k=-N}^{N} h_k^* \cos k\omega\right|$$
$$\leqslant \frac{1}{\delta} \operatorname*{Max}_{\alpha\leqslant\omega\leqslant\pi}\left|\sum_{k=-N}^{N} h_k^* \cos k\omega\right|$$
$$= \frac{1}{\delta}(\delta) = 1, 0 < \alpha \leqslant \omega \leqslant \pi. \tag{4.58}$$

由此表明 $\bar{H} \in \mathscr{H}$.

又由定理的条件

$$|\hat{H}(0)| = C \geqslant |H(0)|, \forall\ H \in \mathscr{H},$$

则 $$|\overline{H}(0)| \leqslant |\hat{H}(0)| = C, \tag{4.59}$$

并且 $$|\overline{H}(0)| = \frac{1}{\delta}|H^*(0)| = \frac{1}{\delta}. \tag{4.60}$$

由（4.59）和（4.60）有

$$\frac{1}{\delta} \leqslant C$$

或 $$\frac{1}{C} \leqslant \delta. \tag{4.61}$$

对照（4.56）$\delta \leqslant 1/C$，则只能

$$\delta = \frac{1}{C}, \tag{4.62}$$

即 $$\delta = D = \operatorname*{Max}_{0\leqslant\omega\leqslant\pi}|\tilde{H}(\omega)| = \frac{1}{C} \tag{4.63}$$

或 $$\operatorname*{Inf}_{\{h_k\}}\{\operatorname*{Max}_{0\leqslant\omega\leqslant\pi}|H(\omega)|\} = \operatorname*{Max}_{0\leqslant\omega\leqslant\pi}|\tilde{H}(\omega)|$$

$$= \delta = \frac{1}{C}. \tag{4.64}$$

表明 $\{\tilde{h}_k\}$ 是最优的 IRF. □

由定理 4.1 知，寻求最优 IRF 的问题化为求 $\mathscr{H}$ 中的一个函数 $\hat{H}$，它满足

$$|\hat{H}(0)| = C = \frac{1}{\delta} \geqslant |H(0)|, \text{一切 } H \in \mathscr{H}. \tag{4.65}$$

为了解决上述问题，我们需要对 $H(\omega)$ 函数给于另外的表达式.

首先，我们指出：$\cos(ky)$ 可以看成是 $\cos(y)$ 的 $|k|$ 阶的多项式. 事实上，我们知道：

$$\cos(2y) = 2\cos^2(y) - 1,$$

$$\cos(3y) = 4\cos^3(y) - 3\cos(y)$$

等等. 对任意的正整数 $M$, $\cos(My)$和 $\cos(y)$之间的关系可以由

$$2^M\cos^M(y) = \sum_{s=0}^{M} C_M^s\cos(2s-M)y \tag{4.66}$$

逐步递推得到

因此
$$H(\omega) = \sum_{k=-N}^{N} h_k\cos(k\omega)$$

显然可以看为阶数为 $N>0$ 的关于 $\cos(\omega)$的多项式，虽然其系数暂时还不能用显式来表达，即

$$H(\omega) = P_N(\cos\omega) = P_N(x), \tag{4.67}$$

$$X = \cos\omega,\ 0 < \alpha \leqslant \omega \leqslant \pi. \tag{4.68}$$

并
$$-1 \leqslant x \leqslant \cos\alpha = a < 1, \tag{4.69}$$

$$H(0) = P_N(1). \tag{4.70}$$

类似于 $\mathscr{H}$，我们可以定义

$$\mathscr{P} = \{P_N(\cos\omega): N \text{ 阶关于 } \cos\omega \text{ 的多项式,实系数,并 } |P_N(\cos\omega)| \leqslant 1, 0 < \alpha \leqslant \omega \leqslant \pi\} \tag{4.71}$$

$$= \{P_N(x): N \text{ 阶实系数多项式. } |P_N(x)| \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant a\}. \tag{4.72}$$

从而定理 4.1 可以平行地用以下方式来叙述：

**定理 4.2** 设 $\hat{P}_N(x) \in \mathscr{P}$ 并使得

$$|\hat{P}_N(1)| \geqslant |P_N(1)|, \tag{4.73}$$

对一切 $P_N(x) \in \mathscr{P}$ 成立，则 $\hat{P}_N(\cos\omega)$ 就是最优的 FRF，并满足

$$|\hat{P}(x)| \leqslant 1, -1 \leqslant x \leqslant a. \tag{4.74}$$

**证明** 只需注意定理 4.1 中

$$\hat{H}(\omega) = \sum_{-N}^{N} \hat{h}_k\cos k\omega$$

$$= \hat{P}_N(x),\ -1 \leqslant x \leqslant a.$$

由(4.52)有 $|\hat{P}_N(x)| \leqslant 1$,并

$$|\hat{P}_N(1)| = |\hat{H}(0)| \geqslant |H(0)| = |P_N(1)|.\square$$

**定理 4.3** 对 $0<\alpha<\pi$，正偶数 $N$，令

$$\hat{P}_N(x) = \cos\left(N\cos^{-1}\frac{2x-a+1}{a+1}\right),$$

$$-1 \leqslant x \leqslant a = \cos\alpha, \tag{4.75}$$

则 $\hat{P}_N(x)$ 满足

$$|\hat{P}_N(x)| \leqslant 1,\ -1 \leqslant x \leqslant a, \tag{4.76}$$

并

$$|\hat{P}_N(1)| \geqslant |P_N(1)|,\ \forall\ P_N \in \mathscr{P}. \tag{4.77}$$

**证明** 首先，在函数论中有车贝谢夫 $T_N(y)$($N$ 阶)的如下表达式(见 J. Rivlin(1990))

$$T_N(y) = \cos(N\cos^{-1}(y)),\ -1 \leqslant y \leqslant 1, \tag{4.78}$$

$$= \cos(N\theta),\quad \theta = \cos^{-1}(y)$$

$$= \sum_{k=0}^{[\frac{N}{2}]}\left((-1)^k \sum_{j=k}^{[\frac{N}{2}]}\binom{N}{2j}\binom{j}{k}\cos^{N-2k}(\theta)\right). \tag{4.79}$$

对于$-1 \leqslant x \leqslant a$，有

$$-1 \leqslant \frac{2x-a+1}{a+1} \leqslant 1, \tag{4.80}$$

从而（4.75）是一个 N 阶的关于 $\cos\theta$ 的多项式，显然

$$|\hat{P}_N(x)| \leqslant 1,\ -1 \leqslant x \leqslant a. \tag{4.81}$$

其次，我们需要证明对任意的 $P_N(x) \in \mathscr{P}$，均有

$$|P_N(1)| \leqslant |\hat{P}_N(1)| \tag{4.81'}$$

成立.

为此，我们令

$$x_m = \frac{1}{2}\left[(a+1)\cos\frac{m\pi}{N} + (a-1)\right], m = 0,1,2,\cdots,N, \tag{4.82}$$

或者改写（4.82）为

$$\cos\frac{m\pi}{N} = \frac{2x_m - a + 1}{a+1}, m = 0,1,2,\cdots,N, \tag{4.83}$$

而利用 $|\cos\theta| \leqslant 1$，知

$$-1 \leqslant x_m \leqslant a,\ m = 0,1,2,\cdots,N, \tag{4.84}$$

并且

$$x_m < x_n, \cos\frac{m\pi}{N} < \cos\frac{n\pi}{N},\ \text{当}\ n < m. \tag{4.85}$$

另一事实是：任一多项式 $P_N(x)$，其阶数为 $N$，可唯一地被它的 $N+1$ 个值 $P_N(x_m)$，$m=0, 1, 2, \cdots, N$ 所决定．事实上，大家熟知的 Lagrange 内插公式有

$$P_N(x) = \sum_{m=0}^{N} P_N(x_m) \frac{\prod_{n\neq m}(x - x_n)}{\prod_{n\neq m}(x_m - x_n)}, \tag{4.86}$$

则

$$|P_N(1)| \leqslant \sum_{m=0}^{N} |P_N(x_m)| \left| \frac{\prod_{n\neq m}(1 - x_n)}{\prod_{n\neq m}(x_m - x_n)} \right| \tag{4.87}$$

由（4.84）知（$1-x_n$）$>0$，则

$$\prod_{n\neq m}(1 - x_n) \geqslant 0,$$

从而（4.87）的分子乘积部分为非负的．

又

$$\prod_{n\neq m}(x_m - x_n) = \prod_{n<m}(x_m - x_n) \prod_{n>m}(x_m - x_n), \tag{4.88}$$

而（4.85）表明 $\{x_n\}$ 是单调序列，则（4.88）的第二项是非负的，第一项是负的，可见

$$\left|\prod_{n\neq m}(x_m - x_n)\right| = (-1)^m \prod_{n\neq m}(x_m - x_n). \tag{4.89}$$

则（4.87）可表为

$$|P_N(1)| \leqslant \sum_{m=0}^{N} |P_N(x_m)| \cdot (-1)^m \frac{\prod_{n\neq m}(1-x_n)}{\prod_{n\neq m}(x_m-x_n)}. \tag{4.90}$$

又由于，$P_N \in \mathscr{P}$，则当$-1 \leqslant x_m \leqslant a$时，

$$|P_N(x_m)| \leqslant 1.$$

代入（4.90）可得

$$|P_N(1)| \leqslant \sum_{m=0}^{N} (-1)^m \frac{\prod_{n\neq m}(1-x_n)}{\prod_{n\neq m}(x_m-x_n)}. \tag{4.91}$$

但是由（4.75）$\hat{P}_N$（$x$）的定义知

$$\begin{aligned}\hat{P}_N(x_m) &= \cos\left(N\cos^{-1}\left(\cos\frac{m\pi}{N}\right)\right) \\ &= (-1)^m,\end{aligned} \tag{4.92}$$

于是将（4.92）代入（4.91）右端得

$$|P_N(1)| \leqslant \sum_{m=0}^{N} \hat{P}_N(x_m) \frac{\prod_{n\neq m}(1-x_n)}{\prod_{n\neq m}(x_m-x_n)} \tag{4.93}$$

$$= \hat{P}_N(1). \tag{4.94}$$

最后一步是对于$\hat{P}_N$（$x$）多项式用 Lagrange 公式（4.86）得到．到此，本定理全部得证．□

由定理 4.3 可知

$$\hat{H}(\omega) = \cos\left(N\cos^{-1}\frac{2\cos\omega - \cos\alpha + 1}{\cos\alpha + 1}\right), \alpha \leqslant \omega \leqslant \pi, \tag{4.95}$$

并
$$|\hat{H}(\omega)| \leqslant 1, \ \alpha \leqslant \lambda \leqslant \pi. \tag{4.96}$$

而$|\hat{H}(0)|$具有最大值．

据以上结论可得最优的 FRF 是

$$
\begin{cases}
H^*(\omega)=\delta\cos\left(N\cos^{-1}\dfrac{2\cos\omega-\cos\alpha+1)}{\cos\alpha+1}\right), \ \alpha\leqslant\lambda\leqslant\pi, \\
\delta=\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{\hat{P}_N(1)}.
\end{cases}
\tag{4.97}
$$

以上我们只给了 $H^*(\omega)$在$[\alpha,\pi]$的表达式,而$[0,\alpha)$还没有给,应注意,此时(4.97)$H^*(\omega)$表达式不能成立.因为,由 $\alpha>0$, $1-\cos\alpha>0$ 和 $1+\cos\alpha<2$, 则

$$
\frac{2+(1-\cos\alpha)}{1+\cos\alpha}>\frac{2}{2}=1.
$$

表明 (4.97) 式自变量

$$
\cos^{-1}\left(\frac{2\cos\omega-\cos\alpha+1}{1+\cos\alpha}\right)\bigg|_{\omega=0}
$$

是无意义的.

然而由(4.79)看,车贝谢夫 $N$ 阶多项式是 $\cos\omega$ 的函数,由连续函数性质,在$[0,\alpha)$也是确定的函数,虽然不能用(4.97)表达.所幸的是 $T_N(y)$也可以有另外的表达式(见 Rivlin(1990)第一章的 Ex. 1. 1. 1)

$$
T_N(y)=\frac{1}{2}\{(y+\sqrt{y^2-1})^N+(y-\sqrt{y^2-1})^N\},
$$

$$
-1\leqslant y\leqslant 1, \tag{4.98}
$$

从而对 $\hat{P}_N(x)$ 可表为

$$
\hat{P}_N(x)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{2x-a+1}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{2x-a+1}{a+1}\right)^2-1}\right]^N\right.
$$

$$
\left.+\left[\frac{2x-a+1}{a+1}-\sqrt{\left(\frac{2x-a+1}{a+1}\right)^2-1}\right]^N\right\},
\tag{4.99}
$$

其中 $a=\cos\alpha$，并且

$$\hat{P}_N(1)=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right]^N+\left[\frac{3-a}{a+1}-\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right]^N\right\}. \quad (4.100)$$

设 $\delta=1/\hat{P}_N(1), C_\omega=\cos\omega$,

则最优的 FRF 为

$$H^*(\omega)=\begin{cases}\delta\cos(N\cos^{-1}\Phi(\omega)), & \alpha\leqslant\omega\leqslant\pi,\\ \frac{\delta}{2}\{(\Phi(\omega)+\sqrt{\Phi^2(\omega)-1})^N \\ \quad +(\Phi(\omega)-\sqrt{\Phi^2(\omega)-1})^N\}, & 0\leqslant\omega\leqslant\alpha,\end{cases} \quad (4.101)$$

其中 $$\Phi(\omega)=\frac{2C_\omega-a+1}{a+1},\ a=\cos\alpha. \quad (4.102)$$

由函数的连续性知（4.101）的二个分支函数在 $\omega=\alpha$ 点上是重合的.

## §3 极大极小准则下最优滤波在海洋重力勘探中的应用

### 3.1 滤波项数 $N$ 的确定.

在第二节中我们已求出了最优 FRF 的函数表达式为(4.101). 然而，在应用中，对给定的误差 $\delta>0$. 究竟应如何选择滤波项数 $N$ 呢？一般地，$N$ 愈大，滤波效果愈好. 但是，$N$ 大了就要求测量数据增多，从而作业时间加长. 在勘察工作中就必然增加工作点的距离，这样勘察的密度就稀了. 因此，在

误差 $\delta$ 范围内，适当选择合理的 $N$ 就很有实际意义．为此，我们看（4.100）中的二个因子

$$\left[\frac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right]\left[\frac{3-a}{a+1}-\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right]$$

$$=\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-\left[\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right]^2=1. \tag{4.103}$$

由于 $a=\cos\alpha<1$，则（4.103）第一个因子是大于 1 的，从而第二个因子

$$\frac{3-a}{a+1}-\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}<1. \tag{4.104}$$

可见，在（4.100）中，当 $N$ 适当地大时，有

$$\hat{P}_N(1)\sim\frac{1}{2}\left[\frac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right]^N. \tag{4.105}$$

于是，对给定的 $\delta>0$，$\delta=1/\hat{P}_N(1)$，可要求

$$\frac{1}{2}\left[\frac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right]^N\geqslant\frac{1}{\delta}. \tag{4.106}$$

解此不等式即可得 $N$ 的估计值．

例如，$\delta=10^{-6}$，$\alpha=2\pi/38$，则

$a=\cos\alpha=0.9863613$，

$\log(2\delta^{-1})=14.5086$，

$$\frac{\log(2\delta^{-1})}{\log\left[\frac{3-a}{a+1}+\sqrt{\left(\frac{3-a}{a+1}\right)^2-1}\right]}=\frac{14.5086}{0.16554}=87.6440. \tag{4.107}$$

可见，$N$ 可选为 $N=88$，全部的滤波长度为

$$2N+1=177.$$

显然，对不同的 $\alpha$ 和 $\delta$，$N$ 也不相同，在应用中常有取样间隔 $\Delta$，则 $a=\cos\Delta\alpha$. 表 4.3 给出了当 $\Delta=0.4$(sec) 时，$\alpha=2\pi/T$、由不同的截止周期 $T$、$\delta$ 决定了 $N$ 值.

| $T$ \ $\delta$ / $N$ | $10^{-5}$ | $10^{-6}$ | $10^{-7}$ |
|---|---|---|---|
| 30 | 140 | 166 | 195 |
| 33 | 156 | 186 | 215 |
| 36 | 167 | 198 | 235 |
| 38 | 184 | 219 | 255 |
| 42 | 195 | 232 | 274 |
| 45 | 208 | 248 | 294 |
| 48 | 225 | 268 | 314 |
| 60 | | | 392 |
| 120 | | | 784 |
| 180 | | | 1176 |
| 240 | | | 1568 |
| 300 | | | 1960 |
| 420 | | | 2744 |

表 4.3 ($\Delta=0.4$，$T=2\pi/\alpha$)

由表 4.3 可看，滤波器要截止的周期愈长或误差 $\delta$ 愈小，项数 $N$ 都会增大.

对 $T=30$，$\Delta=0.4$，$\delta=0.1$，$N=88$，车贝谢夫 FRF 的数值和图象由表 4.4 和图 (4.11) 所示.

79.7296，　39.80195，　2.507649，　0.087963，　−0.078568，
0.035531，　−0.004134，　−0.017156，　0.031807，　−0.042165，

0.049676,　−0.055247,　0.059445,　−0.062652,　0.065124,
−0.067035,　0.068516,　−0.069674,　0.070654,　−0.071916,
0.075413,　0.088263,　0.082962,　−0.019691,　0.062817,
−0.070050,　0.071232,　−0.071207,　0.070894,　−0.070480,
0.070001,　−0.069474,　0.068898,　−0.068281,　0.067621,
−0.066925,　0.066192,　−0.065426,　0.064624,　−0.063794,
0.062931,　−0.062042,　0.061122,　−0.060179,　0.059207,
−0.058302,　0.057283,　−0.056242,　0.055178,　−0.054091,
0.052981,　−0.051856,　0.050708,　−0.049542,　0.048356,
−0.047154,　0.045933,　−0.044698,　0.043441,　−0.042177,
0.040892,　−0.039617,　0.038436,　−0.037784,　0.039803,
−0.054132,　0.098694,　0.043759,　0.014537,　−0.025562,
0.026654,　−0.025738,　0.024405,　−0.022991,　0.021552,
−0.020105,　0.018646,　−0.017184,　0.015714,　−0.014239,
0.012761,　−0.011281,　0.009793,　−0.008299,　0.006808,
−0.005310,　0.003817,　−0.002310,　0.000805

**表 4.4** ($H'(\omega_k)$, $k=0,1,2,\cdots,88$)

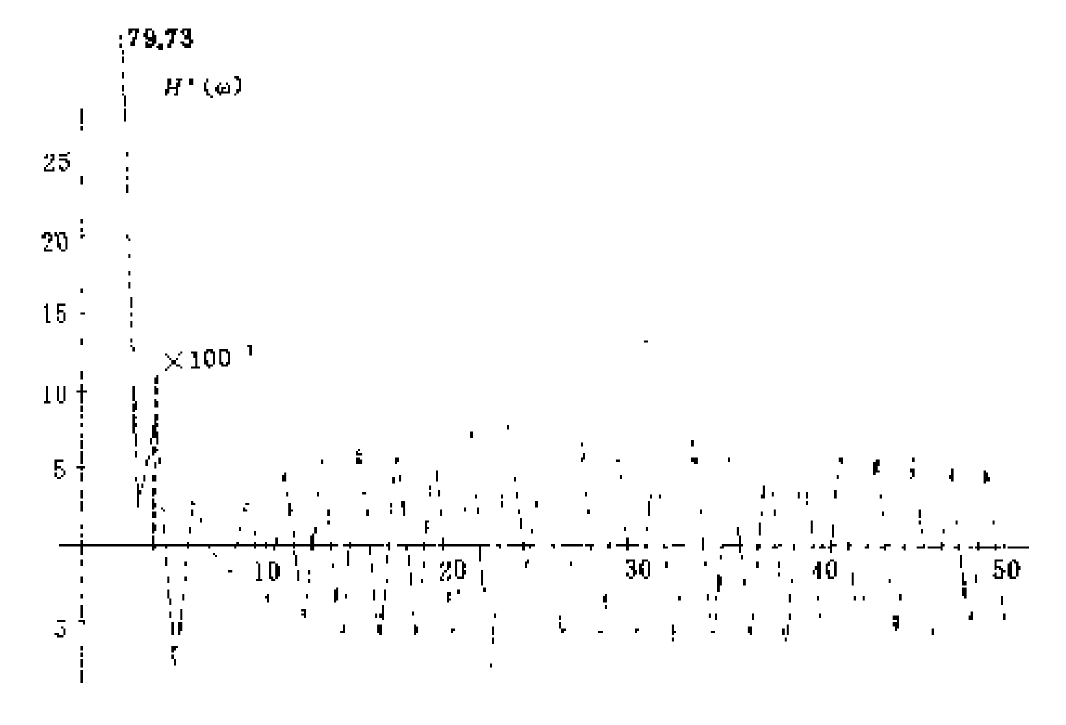



**图 4.11**　$\alpha=2\pi/30$、$\Delta=0.4$、$N=88$、$\delta=0.1$ 时 $H_N^{\delta}(\omega)$ 的图形

对应于表 4.4 的 $H_N^*(\omega)$ 的 IRF $\{h_k\}$ 其图形如图 4.12 所示，它的真值列于表 4.5. 从图 4.12 可以看出：为了在频域上得到非常低频的低通滤波，在时域上必然是很“宽”的函数，即衰减得不很快. $H_N^*(\omega)$ 虽然摆动得比较厉害，但都在 $\delta$ 水平线限制之下，是事先设计的容许误差.

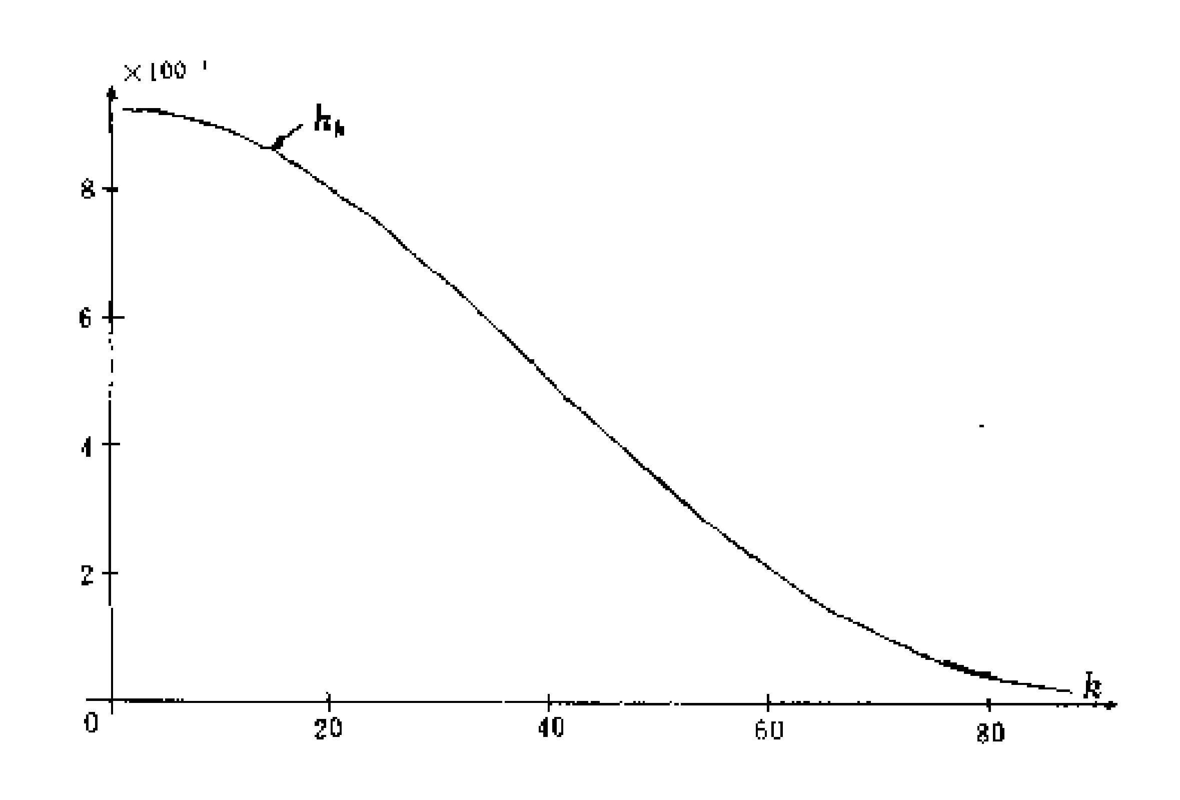



图 4.12　$\alpha=2\pi/30$，$\Delta=0.4$，$N=88$，$\delta=0.1$ 所对应的 IRF $\{h_k\}$.

## 3.2　最优滤波器在重力勘探中的应用.

在 1970—1975 年，我们在我国东海进行了海洋重力仪（我国自行研制的 ZY—1 型仪器）的长时间的试验并和静态重力仪测出的标准数值进行校对. 其中，从强干扰中检测微弱重力信号的方法就是用以上介绍的最优 $H_N^*(\omega)$ 的滤波器在国产小型 127 电算机上实现实时处理的. 图 4.13 是一张真实的量测重力信号的结果. 当时海浪引起的干扰的幅度是 33 000～50 000 (mgal)，而信号变化在 5mgal 左右. 相差 1 万倍. 然而用以上介绍的车贝谢夫函数滤波所量测的信号与真值误差在 1～

2mgal（S. D.），达到了大规模勘探普查精度的要求.

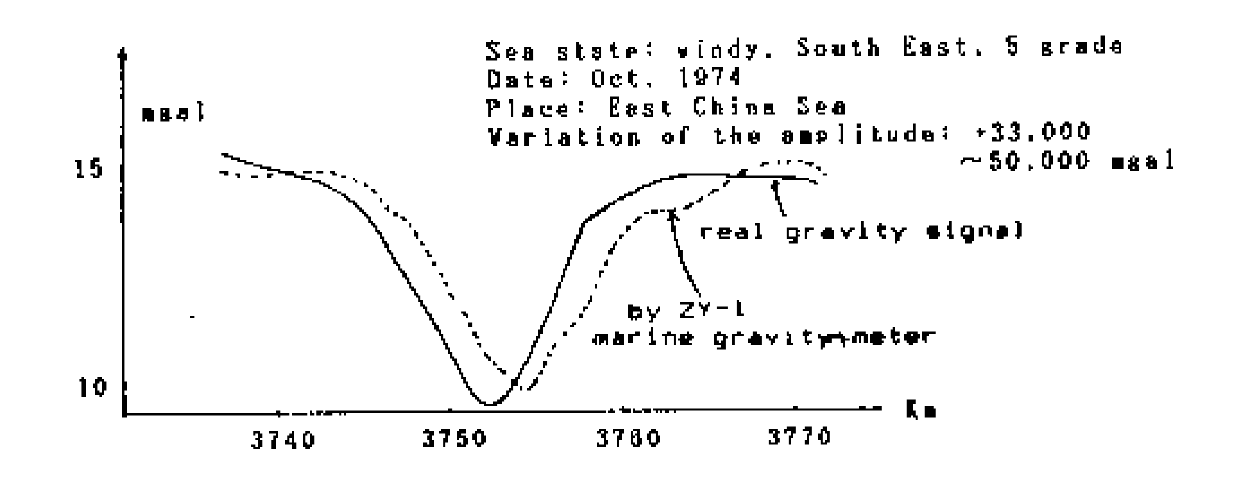



**图 4.13** 在我国东海用 ZY—1 重力仪与静态重力仪量测信号的比较. 海况：东南风，5 级，1974. 10 月海浪引起的幅度变化 33 000～50 000（mgal）.

为了和其它滤波方法作比较，特别选了两种常用的方法：

1. Gauss 型滤波.

其 IRF 为

$$h_k = ce^{-0.0004(k\Delta)^2}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \qquad (4.108)$$

2. 三次平均滤波.

在上一章中我们已介绍过，算术平均就是一种滤波，它可以消除“高频”成份. 所谓三次平均滤波就是：对原始数据进行 $n$ 项移动平均之后再进行 $n$ 项移动平均，对上述结果再进行第三次移动平均. 可以想象，三次平均后，曲线必然很光滑.

三种不同滤波方法的结果列于表 4.6.

| 取样间隔 Δ（sec） | 长度 $N$ | 二测量点之距离 |
|---|---|---|
| 三次平均＝0.6 | 1024 | 3.15 km |
| Gauss＝0.4 | 1024 | 2.00 km |
| 车贝谢夫＝0.4 | 512 | 1.00 km |

**表 4.6**

由表 4.6 可看出，我们引进的滤波方法优于其它二种方法.

0.093067,　0.09280,　0.092749,　0.092623,　0.092151,
0.092073,　0.091625,　0.091122,　0.090815,　0.089978,
0.089387,　0.088711,　0.087718,　0.087130,　0.087157,
0.085154,　0.084340,　0.083005,　0.081957,　0.080822,
0.079404,　0.078410,　0.077020,　0.075636,　0.074438,
0.072735,　0.071366,　0.069911,　0.068213,　0.066962,
0.065308,　0.063697,　0.062275,　0.060368,　0.058841,
0.057235,　0.055424,　0.054081,　0.052332,　0.050662,
0.049184,　0.047244,　0.045725,　0.044134,　0.042375,
0.041094,　0.039409,　0.037833,　0.036448,　0.034630,
0.033621,　0.031823,　0.030252,　0.029152,　0.027659,
0.026293,　0.025109,　0.023535,　0.022410,　0.021222,
0.019933,　0.019078,　0.017859,　0.016774,　0.015847,
0.014594,　0.013756,　0.012861,　0.011900,　0.011296,
0.010386,　0.009598,　0.008434,　0.008038,　0.007475,
0.006871,　0.006235,　0.005837,　0.005230,　0.004716,
0.004277,　0.003734,　0.003396,　0.003041,　0.002693,
0.002428,　0.002087,　0.001789,　0.005804.

**表 4.5　车贝谢夫滤波系数 $(h_k)$**

# 第五章　极大信噪比滤波
# —在天王星光环检测中的应用

## §1　天王星光环的发现及其检测中的问题

数百年前伽里略用光学望远镜发现了土星有美丽的光环，从那以后几百年间再没有人用望远镜发现太阳系里其它行星也有光环．甚至有的天文学家断言太阳系里的行星除土星外都没有形成光环的可能．直到 1977 年 3 月 10 日在一次掩星的偶然观测中发现了天王星也有光环．这一伟大的发现被认为是 20 世纪太阳系里最重要的发现．

1977 年 3 月 10 日夜间将发生天王星与恒星（编号 SAO158687）相掩的现象，当时进行这一稀有现象观测的只有美国、中国、澳大利亚、印度、南非等少数几国的天文台．美国的空中飞行实验室 KAO 在观测掩星的现象时发现天王星在轨道上移动尚未到达该恒星的位置，后者的光度即自行暗淡下来，然后自行恢复本来的亮度，隔一段时间又重复这一现象，前后共五次才出现掩星现象，随后又再次出现 5 次亮度发生变化的情况，KAO 当天的记录由 Elliot 等人（1977）在 Nature 上发表如图 5.1 所示．

由图 5.1 可以明显地看出 KAO 的记录表明有前后各五次

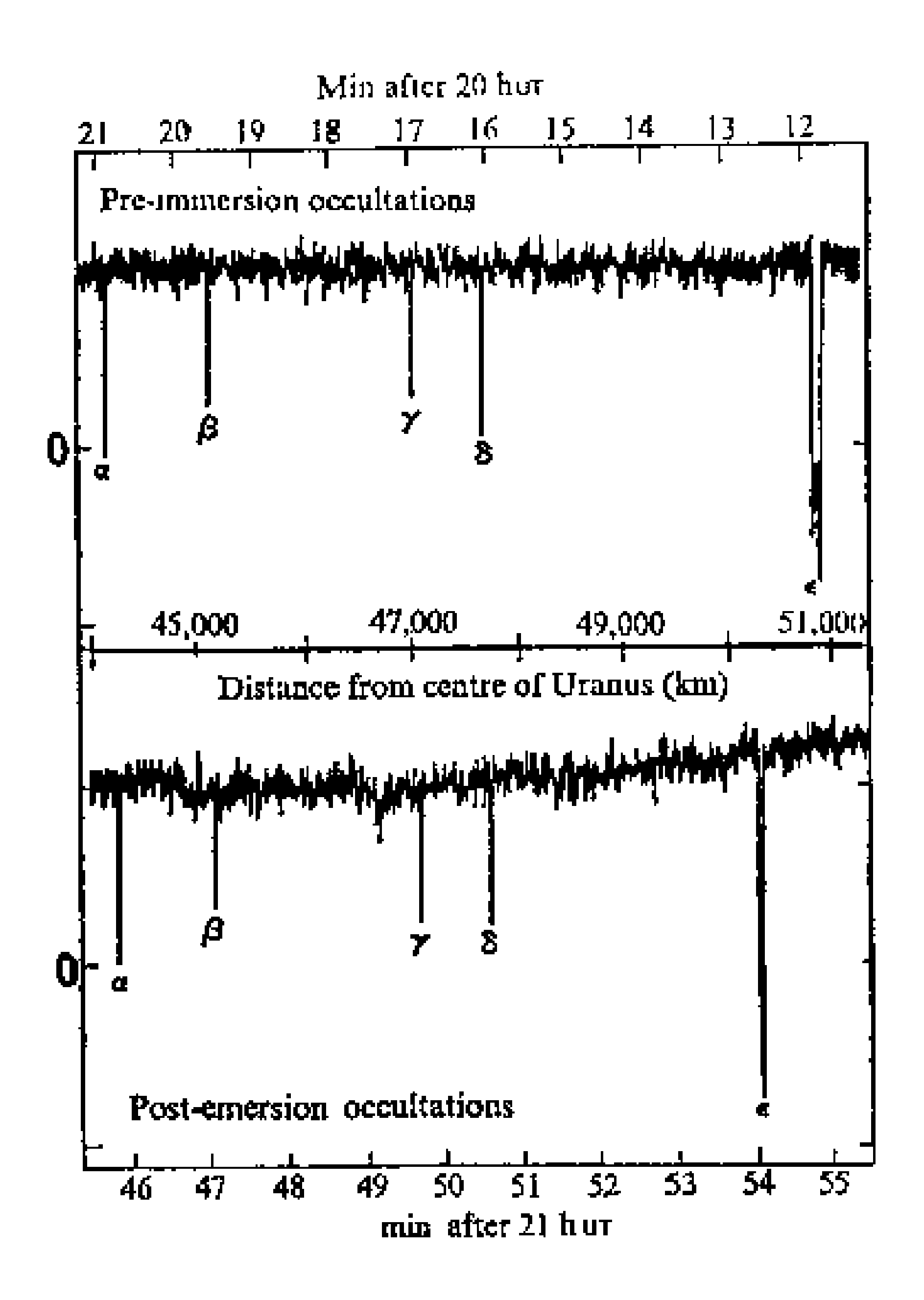



**图 5.1** 掩星发生前后各 5 次光度变化的记录，1977 年 3 月 10 日（Elliot J. L. 等，Nature，267 26 May 1977）.

亮度的变化—原来是天王星的 5 个光环“掩”了该恒星的现象，由此发现了天王星有 5 个光环. 当时美国科学家这一发现成了世界科技界的特大新闻，各家新闻相继报导. 中国科学家在北京天文台当晚的记录如图 5.2 所示.

从中可以看出有一个明显的在记录上亮度的变化. 经过详细测算确定：它就是对应于 ϵ 主环的信号. 因此中国新华社也发了消息：中国科学家发现了天王星也有环. 然而，由于中国天

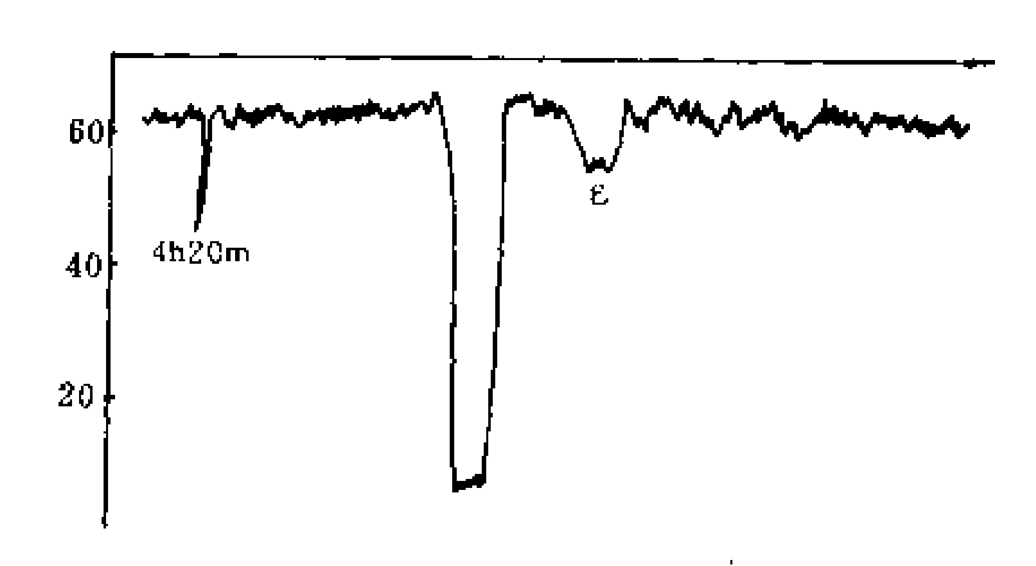



**图 5.2** 中国天王星 1977，3.10 日掩星记录中的 ε 环信号

文学家使用的仪器是红外光度计，其灵敏度比较低，因此在记录上只有一个明显的 ε 信号，没有能找到如美国 KAO 记录上那样明显的 5 个亮度的变化信号. 由于当时只有少数几个天文台有这一重大事件的记录，因此，许多国家的天文学家都十分关心中国的记录是否也能找到其它 α，β，γ，δ 光环的信号？天王星的光环果真是 5 个吗？

观察中国天文工作者对这一事件的记录图 5. 2 不难看出：由于红外光度计灵敏度不高，掩星过程信号又很微弱，因此显得记录上"噪声"水平太强，α，β，γ，δ 又是"小环"，信号比较弱，因此，如果真的存在也一定是完全"淹没"在噪声背景之中.

在记录已成定局的情况下，要检查中国的记录上是否也有 5 个环的信号只能借助于数学上的处理. 在如此杂乱背景中能否把微弱信号（如果它们确实存在）检测出来显然是对数学工作者的一次挑战！

经过艰苦的工作，我们提出了独特的检测天王星环信号的方法. 最后，我们发现：天王星至少有 6 个环，可能还检测到

其它环的信息．这在当时是首先在国际上发现天王星有不止五个环的科学报导（见陈道汉等（1978），中国科学）．这一发现为十年后美国的 Voyager-2 宇宙飞船飞过天王星拍回来的照片（见图 5.9）所证实．原来天王星具有 10 个光环！

我们检测光环信号的方法是属于随机过程的统计检测法，其主要思想是基于一种叫做“极大信噪比滤波”的统计量，而后进行假设检验，对记录进行总共 3720 个点的检测才得到科学的结论的．详细的处理可见谢衷洁、程乾生（1983）的文章．

因此，我们需要介绍极大信噪比滤波的有关数学理论和背景．

## §2　极大信噪比准则下的滤波

### 2.1　极大信噪比准则的工程背景．

一般说来，如果一个信号 $s(t)$ 在传输的过程当中被噪声 $n(t)$ 所干扰，收到的是

$$y(t) = s(t) + n(t), \tag{5.1}$$

则工程上设计的滤波器，或更一般的线性系统 $\mathscr{L}$ 的目的是使 $\mathscr{L}$ 的作用 $\hat{s}(t)=\mathscr{L}(y(t))$ 能与原来的信号 $S(t)$ 愈接近愈好．比如均方误差

$$\sigma^2 = \int |s(t) - \hat{s}(t)|^2 dt \tag{5.2}$$

愈小愈好．

然而，在一些工程技术和科学问题中并不特别关心如何通过 $\mathscr{L}$ 的作用而尽量恢复 $s(t)$ 的波形．它们所关心的是 $y(t)$ 中是

否存在 $S(t)$？还是纯粹的干扰 $n(t)$？比如在雷达探测中，众所周知是由发射源，比如地面雷达站，向空间发射一序列信号，如果空中有目标，信号打到目标身上后就有部分信号被反射回来由地面的接收器所接收．于是发射到反射接收的时间相当于电波往返于目标和发射点所需的时间，由此可算出距离（见图5.3）．

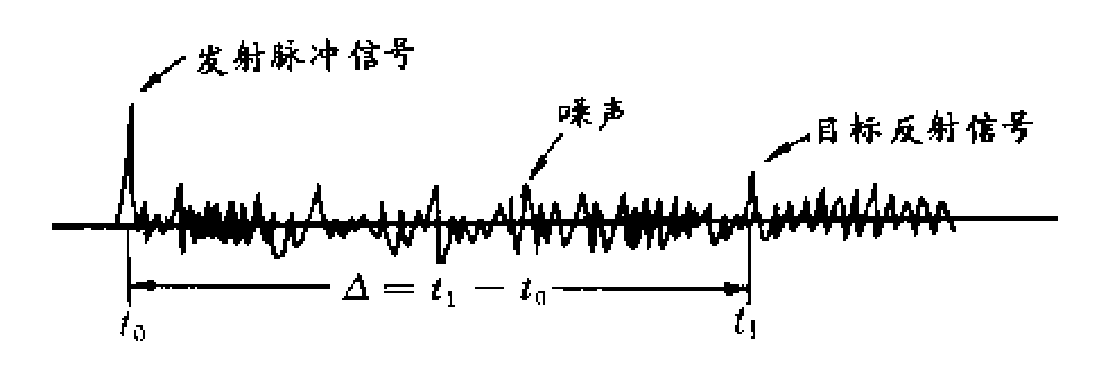



图 5.3　雷达荧光屏上看到的目标反射信号

然而大家知道，雷达信号大多用很短的波长来发射的，在空间传播中衰减很快．在警戒雷达中总是希望愈早地发现敌人目标愈好，也就是说，希望雷达的作用距离愈长愈好．但是工作距离愈长，电波能量损耗就愈大，回波的能量就愈弱，因而在相同的噪声强度下，信号噪声比就愈低，甚至完全“淹没”在噪声中，此时用肉眼观测就很难辨认了．在这种情况下要在杂乱噪声背景中发现回波信号并不要求恢复原信号的完整波形，而只要在噪声背景中能“突出”回波信号就可以了．因此 $\mathscr{L}$ 系统的作用不在于使（5.2）的 $\sigma^2$ 最小，而应该是另外一种“在噪声背景中愈突出信号愈好”的准则——这种准则就是“极大信噪比”准则．

## 2.2　极大 SNR 滤波的数学理论．

数学上的表达是：设收到的信号为

$$y(t) = s(t) + n(t), \quad t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$$

经过 $\mathscr{L}$ 线性系统的作用得输出

$$\begin{aligned} y_0(t) &= \mathscr{L}(s(t)) + \mathscr{L}(n(t)) \\ &= s_0(t) + n_0(t). \end{aligned} \tag{5.3}$$

其中假定 $n(t)$是平稳时间序列(噪声)满足

$$En(t) = 0, \tag{5.4}$$

$$En(t+\tau)n(t) = R_n(\tau) \tag{5.5}$$

称为平稳性条件，$R_n(\tau)$为 $n(t)$的相关函数(请参看第一章的有关章节).

可以证明，如果 $n(t)$ 是平稳列，$\mathscr{L}$ 是时不变的线性系统，它的 IRF 为 $\{h_k\}$，则

$$n_0(t) = \mathscr{L}(n(t)) \tag{5.6}$$

也是平稳序列.

事实上

$$n_0(t) = \sum_k h_k n(t-k), \tag{5.7}$$

则由于求平均 $E$ 可以看成是线性算子，故

$$En_0(t) = \sum_k h_k En(t-k) \equiv 0, \forall\, t = 0, \pm 1, \cdots \tag{5.8}$$

$$\begin{aligned} E(n_0(t+\tau)n_0(t)) &= \sum_k \sum_l h_k h_l E(n(t+\tau-k)n(t-l)) \\ &= \sum_k \sum_l h_k h_l R_n(\tau-k+l) \qquad (5.9) \\ &= R_{n_0}(\tau) \qquad (5.10) \end{aligned}$$

与原始点 $t$ 无关. 可见 $n_0(t)$满足平稳性条件.

同样 $R_{n_0}(0)$是 $\mathscr{L}$ 输出的噪声的方差—电工上它刻划了噪声 $n_0(t)$的“平均功率”.

设信号 $s(t)$ 经过 $\mathscr{L}$ 的输出为

$$s_0(t) = \mathscr{L}(s(t)), \tag{5.11}$$

则

$$\left(\frac{S}{N}\right)_t = \frac{S_0^2(t)}{R_{n_0}(0)} \tag{5.12}$$

刻划了 $\mathscr{L}$ 的输出(5.3)中信号对噪声的功率比值在 $t$ 时刻的大小.

我们的问题是：假设 $s(t)$的波形已知,$n(t)$是平稳噪声列,它的相关函数 $R_n(\tau)$为已知,则对给定的 $t=t_1$,要求一个线性系统 $\mathscr{L}_0$ 使得

$$\left(\frac{S}{N}\right)_0 = \operatorname*{Max}_{\mathscr{L}}\left(\frac{S}{N}\right)_{t_1} \tag{5.13}$$

是最大的，问：$\mathscr{L}$ 是什么样的系统?

## 2.3 极大信噪比的数学分析.

设线性系统 $\mathscr{L}$ 的 IRF 为 $\{h_k\}$ 满足

$$\sum_k |h_k| <+\infty, \tag{5.14}$$

信号 $s(t)$ 也满足

$$\sum_k |s(k)| <+\infty, \tag{5.15}$$

而噪声 $n(t)$为零均值的平稳列,其相关函数 $R_n(\tau)$满足

$$\sum_k \sum_l |h_k h_l R_n(\tau-k+l)| <+\infty, \tag{5.16}$$

对一切 $\tau\in Z$（整数集）成立.

记
$$R_{n_0}(\tau) = \sum_k \sum_l h_k h_l R_n(\tau-k+l) \tag{5.17}$$

在 $t=t_1$ 的信噪比为

$$\left(\frac{S}{N}\right)_t = \frac{S^2(t_1)}{R_{n_0}(0)}. \tag{5.18}$$

设想最优的信噪比是$\frac{1}{\lambda}$，则对任意的 $\mathscr{L}$，它的信噪比必是（在 $t=t_1$ 时刻）

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{t_1} = \frac{S_0^2(t_1)}{R_{n_0}(0)} \leqslant \frac{1}{\lambda}, \tag{5.19}$$

或 $$\lambda s_0^2(t_1) \leqslant R_{n_0}(0).$$

由于 IRF $\{h_k\}$ 若乘以一个系数 $c$，信噪比（5.19）是不会有变化的，故可假定

$$s_0(t_1) = 1, \tag{5.20}$$

则（5.19）变为

$$\lambda \leqslant R_{n_0}(0). \tag{5.21}$$

而达到 $\lambda$ 即是最优的系统 $\mathscr{L}^*$.

假定 $g(\tau)$是任一个实函数，它使得

$$\sum_\tau g(\tau)s(t_1 - \tau) = 0, \tag{5.22}$$

则对任何 $\varepsilon>0$，由 $s_0(t_1)=1$ 和(5.22)可得

$$\sum_k [h_k + \varepsilon g(k)]s(t_1 - k) = 1. \tag{5.23}$$

由（5.21），对最优的系统 $\{h_k^*\}$ 有

$$\lambda = R_{n_0}^*(0), \tag{5.24}$$

而以 $\hat{h}(k)=h_k^*+\varepsilon g(k)$为 IRF 的系统由(5.23)表明它也满足条件(5.20)，则它的输出的噪声的方差 $R_{n_0}(0)$由(5.21)知

$$R_{n_0}(0) - \lambda \geqslant 0. \tag{5.25}$$

(5.24) 与(5.25) 相减可得

$$0 \leqslant R_{n_0}(0) - R_{n_0}^*(0), \tag{5.26}$$

对任意的 $\varepsilon>0$ 都有（5.26）的不等式.

具体地写出来，由（5.17）

$$R_{n_0}(t) = \sum_k \sum_l [h_k^* + \varepsilon g(k)][h_l^* + \varepsilon g(l)]R_n(\tau - k + l), \tag{5.27}$$

$$R_{n_0}^*(\tau) = \sum_k \sum_l h_k^* h_l^* R_n(\tau - k + l). \tag{5.28}$$

令 $\tau=0$，并将（5.27）展开

$$R_{n_0}(0)=\sum_k\sum_l(h_k^* h_l^* + \varepsilon^2 g(k)g(l) + \varepsilon g(k)h_l^* +$$
$$\varepsilon g(l)h_k^*)R_n(l-k), \tag{5.29}$$
$$R_{n_0}^*(0) = \sum_k\sum_l h_k^* h_l^* R_n(l-k). \tag{5.30}$$

上二式相减可得

$$\varepsilon^2\sum_k\sum_l g(k)g(l)R_n(l-k)+2\varepsilon\sum_k\sum_l g(k)h_l^* R_n(l-k)$$
$$\geqslant 0,$$

由于 $\varepsilon>0$ 的任意选择，必然导致

$$\sum_k\sum_l g(k)h_l^* R_n(l-k) = 0, \tag{5.31}$$

如果对指定的 $t=t_1$，$\{h_k\}$ 使得：

$$\sum_l h_l R_n(l-k) = \alpha s(t_1-k), \forall k \in \mathbf{Z}, \tag{5.33}$$

$\alpha$ 为任一常数，则对任意满足 (5.22) 的 $g(t)$ 均有

$$\sum_k\sum_l g(k)h_l R_n(l-k) = \sum_k g(k)(\alpha s(t_1-k))$$
$$= \alpha\sum_k g(k)s(t_1-k) = 0,$$

即为条件 (5.31).

反之，如果$\{h_k\}$ 对任一 $g(t)$ 满足

$$\sum_k g(k)s(t_1-k) = 0 \tag{5.22}$$

同时必使

$$\sum_k\sum_l g(k)h_l R_n(k-l) = 0, \tag{5.32}$$

(其中 $R_n(\tau)=R_n(-\tau)$，因为噪声是实平稳列)，则必然应满足

$$\sum_l h_l R_n(k-l) = \alpha s(t_1-k), \forall k \in \mathbf{Z}. \tag{5.33}$$

成为必要条件.

反证之，若不然，(5.33) 右端不成立，记函数为

$$\beta(k) = \sum_l h_l R_n(k-l), k \in \mathbf{Z}, \tag{5.34}$$

它不是 $s(t_1-k)$ 的倍数，于是可令：

$$g(k)=\beta(k)-\sum_u \beta(u)s(t_1-u)\frac{s(t_1-k)}{\sum_v s^2(t_1-v)},\tag{5.35}$$

则它满足（5.22）：

$$\begin{aligned}
&\sum_k g(k)s(t_1-k)\\
&=\sum_k \beta(k)s(t_1-k)-\sum_u \beta(u)s(t_1-u)\frac{\sum_k s^2(t_1-k)}{\sum_v s^2(t_1-v)}\\
&=0.
\end{aligned}\tag{5.36}$$

然而以上所选择的 $g(k)$（见(5.35)），条件(5.32)并不满足. 这只需具体将(5.35)的 $g(k)$ 代入(5.32)来加以验证：

$$\begin{aligned}
&\sum_k \sum_l h_l g(k)R_n(k-l)\\
&=\sum_k g(k)\Big(\sum_l h_l R_n(k-l)\Big)\\
&=\sum_k g(k)\beta(k)\\
&=\sum_k \beta(k)\left[\beta(k)-\sum_u \beta(u)s(t_1-u)\frac{s(t_1-k)}{\sum_v s^2(t_1-v)}\right]\\
&=\sum_k \beta^2(k)-\frac{\sum_u \beta(u)s(t_1-u)}{\sum_v s^2(t_1-v)}\sum_k \beta(k)s(t_1-k)\\
&=\sum_k \beta^2(k)-\frac{\big(\sum_k \beta(k)s(t_1-k)\big)^2}{\sum_v s^2(t_1-v)}.
\end{aligned}\tag{5.37}$$

如果要(5.37)式为 0，则导出

$$\Big(\sum_k \beta^2(k)\Big)\Big(\sum_k s^2(t_1-k)\Big)=\Big(\sum_k \beta(k)s(t_1-k)\Big)^2,\tag{5.38}$$

或 $\left|\sum_k \beta(k)s(t_1-k)\right| = \sqrt{\left(\sum_k \beta^2(k)\right)\left(\sum_k s^2(t_1-k)\right)}.$

$$(5.39)$$

由熟知的 Cauchy-Swartz 不等式，此时当且仅当

$$\beta(k) = \alpha s(t_1 - k), \tag{5.40}$$

$\alpha$ 为常数. 然而这又和我们的假定矛盾. 可见如果对任一 $g(t)$ 使得(5.22)和(5.32)满足,则(5.33)是必然要成立的. 由此可归纳成以下定理:

**定理 5.1** 设信号序列 $s(t)$是实数列,它是绝对可和的,噪声 $n(t)$是零均值的平稳噪声,其相关函数为 $R_n(\tau)$,$\tau\in \mathbf{Z}$ $\{h_k^*\}$是在给定 $t_1$ 时刻达到最大信噪比$\left(\frac{S}{N}\right)_{t_1}$ =max 的系统 $\mathscr{H}^*$ 的 IRF. 又设 $g(t)$是任一实函数满足

$$\sum_t |g(t)| < +\infty \tag{5.41}$$

及

$$\sum_t g(t)s(t_1 - t) = 0, \tag{5.42}$$

则必有

$$\sum_k \sum_l g(k)h_l^* R_n(k - l) = 0 \tag{5.43}$$

成立.

**定理 5.2** 设$\{h_k\}$是系统 $\mathscr{L}$ 的 IRF,$g(t)$是任一满足(5.41),(5.42)的实函数,则要

$$\sum_k \sum_l g(k)h_l R_n(k - l) = 0 \tag{5.44}$$

成立的充分必要条件是

$$\sum_l h_l R_n(k - l) = \alpha s(t_1 - k),\ \forall\ k \in \mathbf{Z}, \tag{5.45}$$

其中 $\alpha$ 为不为零的常数.

**定理 5.3** 设有线性系统 $\mathscr{L}$，它的 IRF 为 $\{h_k\}$，对给定的 $t=t_1$，有（5.45）成立（对某个 $\alpha_0>0$），则 $\{h_k\}$ 即为最优的在 $t=t_1$ 达极大信噪比的 IRF，并且

$$\alpha_0=\frac{R_{n_0}(0)}{s_0(t_1)}. \tag{5.46}$$

定理 5.3 的证明可参考前面的证明手法，这里不细说.

**定理 5.4** （North） 如果噪声 $n(t)$ 是白噪声，即

$$En(t)\equiv 0,$$

$$En(t)n(s)=\sigma^2\delta_{t,s}, \tag{5.47}$$

则最优的线性系统 $\mathscr{L}^*$ 为

$$h_k^*=\alpha s(t_1-k),\ \forall\, k\in\mathbf{Z}. \tag{5.48}$$

此时

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{t_1}^*=\frac{1}{\sigma^2}\sum_k s^2(k). \tag{5.49}$$

**证明** 由信噪比定义

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{t_1}=\frac{s_0^2(t_1)}{R_{n_0}(0)}, \tag{5.50}$$

而
$$s_0(t_1)=\sum_k s(t_1-k)h_k, \tag{5.51}$$

$$\begin{aligned}R_{n_0}(0)&=E\left[\sum_k\sum_l h_kh_ln(u-k)n(u-l)\right]\\&=\sum_k\sum_l h_kh_l\sigma^2\delta_{k,l}\\&=\sigma^2\sum_k h_k^2.\end{aligned} \tag{5.52}$$

将（5.51）、（5.52）代入（5.50）得

$$\left(\frac{s}{N}\right)_{t_1}=\frac{(\sum_k h_k s(t_1-k))^2}{\sigma^2\sum_k h_k^2} \tag{5.53}$$

$$\leqslant\frac{1}{\sigma^2}\frac{\sum_k h_k^2\sum_k s^2(t_1-k)}{\sum_k h_k^2} \tag{5.54}$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_u s^2(u). \tag{5.55}$$

其中（5.53）到（5.54）是运用了熟知的 Gauchy 不等式．而“＝”成立的充分必要条件是

$$h_k=\alpha s(t_1-k),\forall\ k\in\mathbf{Z}. \tag{5.56}$$

定理得证．□

由定理 5.4 知 $\{h_k\}$ 序列是将 $s(k)$ 信号序列“反转”过来乘以一个常数 $\alpha$，特别 $t_1=0$，$\alpha=1$，则

$$h_k=s(-k),\quad k\in\mathbf{Z} \tag{5.56}$$

从而对 $y(t)=s(t)+n(t)$ 的滤波变成

$$\begin{aligned}y_0(t)&=\sum_k h_k y(t-k)\\&=\sum_k s(-k)y(t-k)\\&=\sum_u y(t+u)s(u).\end{aligned} \tag{5.57}$$

对照第一章概率论中的(1.109)，在那里是 $x_{t+u}$ 和 $x_t$ 的“自相关”，而(5.57)可看为是信号 $s(u)$ 和混合信号 $y_t$ 之间的“互相关”．

设想我们的 $\mathscr{L}^*$ 希望能在 $t=t_1$ 时刻达到输出的极大信噪比．

$$\left(\frac{s}{N}\right)_{t_1}^*=\frac{1}{\sigma^2}\sum_k s^2(k), \tag{5.58}$$

则应选

$$h_k = as(t_1 - k), \quad k \in \mathbf{Z}. \tag{5.59}$$

如果我们要把上述 $\mathscr{L}^*$ 应用于实际，或要求能实时在线处理信号，如同雷达那样实时工作，那么就要求 $\mathscr{L}^*$ 是可物理实现的（参看第二章（2.42）和（2.46）及有关的说明）．此时要求

$$h_k = 0,\ k < 0, \tag{5.60}$$

或

$$s(t_1 - k) = 0,\ k < 0.$$

即

$$s(u) = 0,\ u > t_1. \tag{5.61}$$

（5.61）的条件表明要在 $t=t_1$ 使 $\mathscr{L}^*$ 能达到最大的信噪比（5.58），信号 $s(u)$ 必须在 $t_1$ 时刻以前出现，在雷达工作中即要求探测信号必须在 $t=t_1$ 时刻以前"发射完毕"！

当然，这是由于要求信噪比达到（5.58）并且是实时的．如果不要求实时处理（5.61）不一定要求；或者信噪比不要求达到（5.58）那么高，则不满足（5.61）仍然可以作实时处理，当然这种情况下数学上要复杂得多．有兴趣读者可参看谢衷洁（1990）的有关章节．

## 2.4 弱信号检测中的例子．

以上得到的结果（5.57）告诉我们：最优的极大信噪比滤波器 $\mathscr{L}^*$ 实质上是一个相关器（Correlator）—这一结论在工程技术上具有极其重大的指导意义，在许多实际领域得到了极其广泛的应用，这方面李郁荣博士曾作出了杰出的贡献*．

一个白噪声背景中检测周期信号的例子：

设我们的信号 $s(t)$ 如图 5.4 所示：

$$s(t) = \begin{cases} 1, & t = 10k, k = 1, 2, \cdots, 30; \\ 0, & \text{其它}, \end{cases} \tag{5.62}$$

---

* Lee Y. W., Cheatham T. P. and Wiesner J. B., Application of Correlation analysis to the detection of periodic signals in noise, PIRE, 1950, 38, 1165.

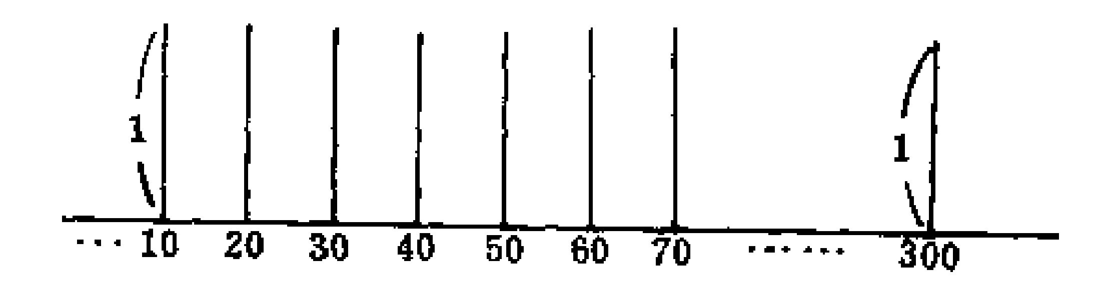



图 5.4 一个以 10 为周期 1 的脉冲序列

而 $n(t)$ 为白噪声 $\overline{U}_{[-2.5,2.5]}$，即

$$\begin{cases} En(t) = 0, \\ En(t)n(s) = \frac{25}{12}\delta_{t,s}. \end{cases} \tag{5.63}$$

而收到的信号为

$$y(t) = s(t) + n(t),\ t = 1,2,\cdots,300. \tag{5.64}$$

其图形如图 5.5 所示：

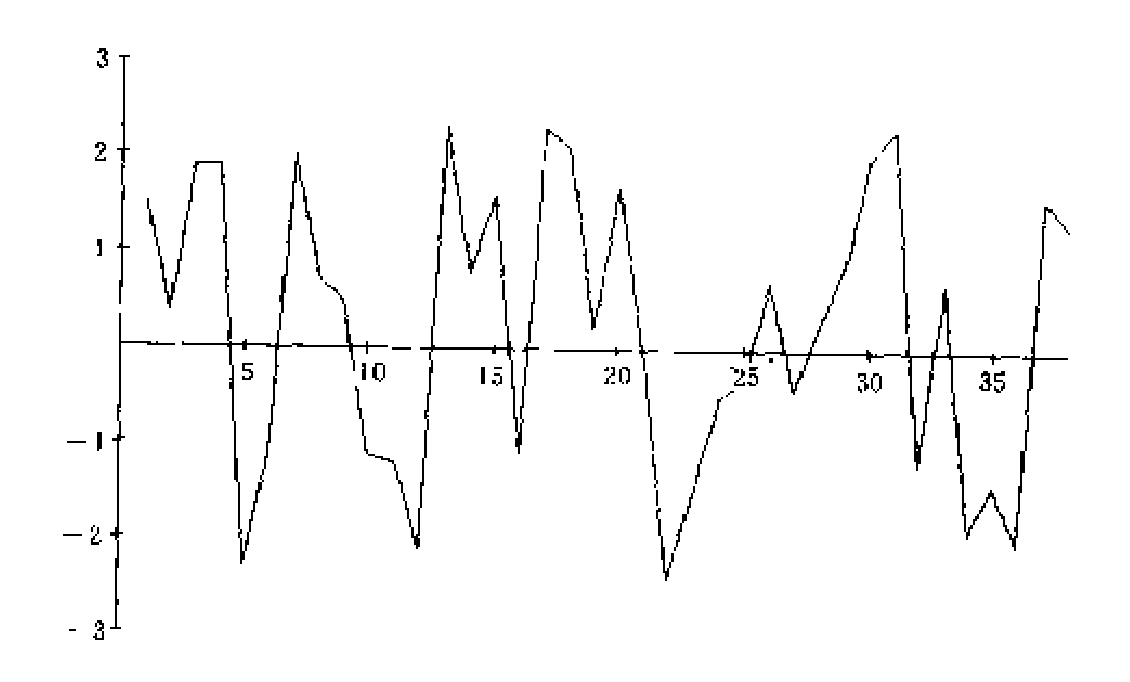



图 5.5 $y(t) = s(t) + n(t), SNR = -6.375(dB)$

从图 5.5 可以看出 $y(t)$ 和信号 $s(t)$ 的原型已有很大的差别，可以说已"面目全非". 如果对(5.64) 中 $y(t)$ 所含的信号与

噪声的比例算一下知

$$\mathrm{SNR} = 10\lg\left(\frac{s^2(t_0)}{R_n(0)}\right) - 10\lg\left(\frac{1}{\frac{15}{12}}\right)^2$$

$$= 10\lg(0.48)^2 = -6.375(dB). \qquad (5.65)$$

如今我们用极大信噪比来进行滤波. 由定理 5.4 和 (5.57), 我们选

$$h_k = s(k), \quad k = 1,2,\cdots,100. \qquad (5.66)$$

即滤波公式为

$$y_0(t) = \sum_{u=1}^{100} y(t+u)s(u), t = 0,1,2,\cdots,200. \qquad (5.67)$$

将图 5.5 的有关数据输入到 (5.67) 可得其图形如图 5.6 的输出结果 (尺度缩小了$\frac{1}{5}$, 横座标为 $t+1$).

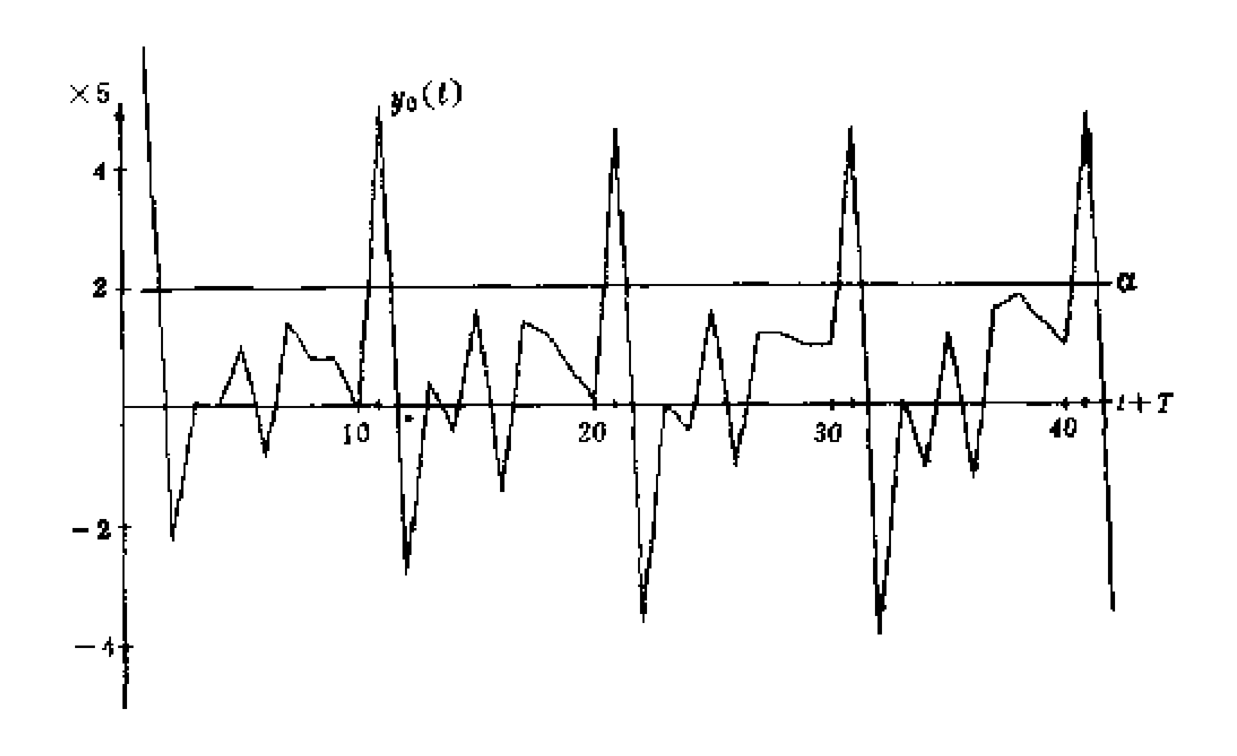



图 5.6 $y(t)$ 的极大 SNR 滤波结束

从图 5.6 可以看到: 虽然 $y_0(t)$ 与 $s(t)$ 波形上相去甚远, 然而很明显可以看出在 $t+1 = 11,21,31,41\cdots$ 等位置上, 即 $t=$

10,20,… 等位置上有尖脉冲出现，如果对 $y_0(t)$ 作如下整形（适当选 $\alpha$）

$$\hat{s}(t)=\begin{cases}1, & y_0(t)>\alpha;\\ 0, & \text{否则}.\end{cases} \tag{5.68}$$

则由图 5.6 可准确地恢复 $s(t)$，即(5.68) 的 $\hat{s}(t)$ 可完全恢复或绝大部分地得到恢复.

## §3　利用极大信噪比方法检测天王星光环信号

在本章一开始就提出了一个天文学中的重大课题：如何在我国天文工作者 1977 年 3 月 10 日对天王星对 SAO158687 恒星的掩星过程的光测曲线（见图 5.2）记录的基础上，用数理统计方法检测被噪声掩盖的光环信息？为此，我们先对噪声背景、可能出现信号的形式进行分析，然后再指出如何利用极大信噪比的方法来检测信号.

### 3.1　信号的形式

在前二节介绍的极大信噪比滤波理论中，我们需要知道未被噪声干扰、未发生畸变的信号的形式. 经过反复实验和分析得知，如果有光环信号被仪器接收到，则在记录上它的数学公式应是

$$s(t)=\begin{cases}I_0(1-e^{-t/T}), & t<T_0;\\ I_0(1-e^{-T_0/T})e^{-(t-T_0)}/T, & t\geqslant T_0.\end{cases} \tag{5.69}$$

其中 $I_0$ 表示方波的幅度，$T$ 代表信号的持续时间，或时间常数（我们的场合相当于 $T=RC=1$）.

为了计算上的方便，需要对信号进行“离散化”，抽样间隔

为 0.25sec，从而信号的波形可表为

$$s(k)=\begin{cases}I_0(1-e^{-T_0/T})e^{-(4-T_0-\frac{k}{4})/T}, & k\leqslant\dfrac{4-T_0}{0.25},\\[2ex] I_0(1-e^{-(4-\frac{k}{4})/T}), & k>\dfrac{4-T_0}{0.25}.\end{cases}\tag{5.70}$$

其图形如图 5.7 所示（$T_0=1$，$I_0=1$，$T=1$）.

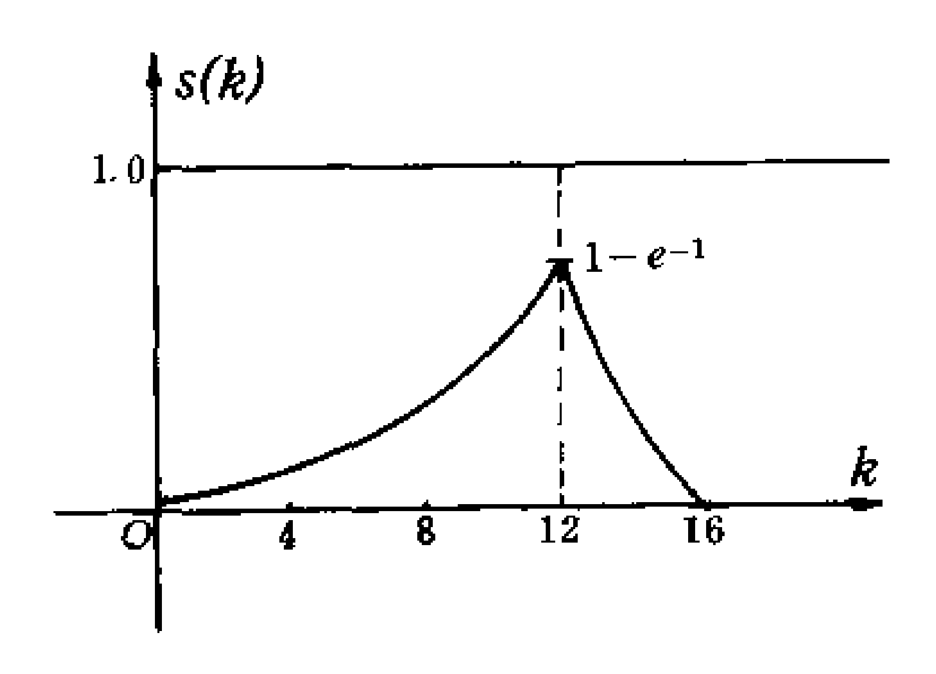



图 5.7 信号的离散化形式 $T=T_0=I_0=1$

在（5.70）式中 $T=RC=1$ 是仪器参数确定的，$T_0$ 我们是通过极大似然方法估计到的：

| $T_0$ | 0.50 | 0.70 | 1.00 | 1.25 | 1.50（sec） |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(T_0)$ | 13.97 | 13.27 | 17.48 | 15.67 | 14.30 |

表 5.1

其中当 $T_0=1.00$ 时 $f(T_0)$ 最大，故选 $T_0=1.00$sec 这与美国 KAO 的参数不谋而合.

## 3.2 噪声的统计性质.

由观测记录读者看到了记录背景上有很强的不规则“杂波”实际上就是噪声，它在统计学上称为随机过程. 经过分析，它主要产生于二个源：一是来源于星光闪烁，二是来源于仪器系统的热噪声. 而经过分析可以确认，噪声 $n(t)$ 是平稳随机过程（见第一章 § 3），即它满足以下二个条件：

$$\begin{cases} E[n(t)] \equiv a, \forall\ t, \\ E[n(t+\tau)-a][n(t)-a] = R(\tau), \forall\ t,\tau. \end{cases} \tag{5.71}$$

而取一段实测的噪声 $n(t)$ 的记录，将它离散化

$$n_t = n(t\cdot\Delta),\quad t = 1,2,\cdots,n,(\Delta = 0.25\text{sec})$$

则 $\{n_t\}$ 是平稳时间序列，并令

$$R(k) = \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n-k} n_l n_{l+k}, k = 0,1,2,\cdots,M. \tag{5.72}$$

它可以作为理论相关函数的非常好的估计.

由（5.72）实算出来的 $R(k)$ 列于表 5.2，而 $R(k)$ 的

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $R(k)$ | 1.00 | 0.761 | 0.521 | 0.309 | 0.153 | 0.054 | −0.010 | −0.054 |
| $k$ | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
| $R(k)$ | −0.041 | −0.010 | 0.010 | 0.015 | −0.007 | −0.026 | 0.007 | 0.025 |

表 5.2

图形如图 5.8 所示，由 $R(k)$ 的数值和图形上看，$n(t)$ 不可能是独立同分布的白噪声序列.

（即 $R(\tau)=E(n(t)-a)(n(t+\tau)-a)=\sigma^2(\delta_{0,\tau})$）.

在第一章 § 3 中我们已介绍了 AR($p$)模型的定义（见(1.115)），事实上，利用时间序列分析的方法可以对上述记录到

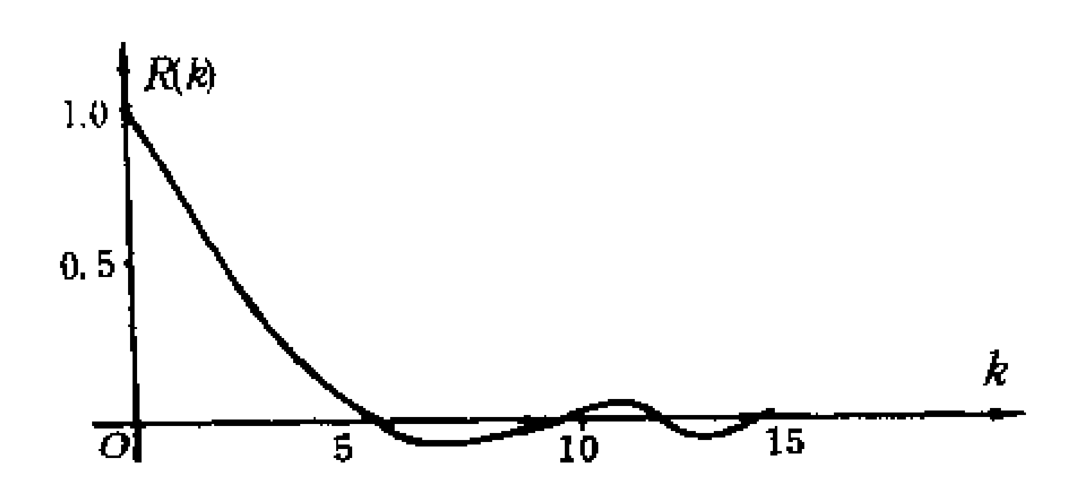



图 5.8　观测噪声 $n(t)$ 的相关函数 $R(k)$

的噪声 $n(t)$ 用以下的模型来描述：$n(t)$ 满足以下的 AR(1) 随机差分方程

$$n(t)+0.761n(t-1)=0.6486\epsilon(t), \tag{5.73}$$

其中 $\epsilon(t)$ 是标准白噪声列

$$E\epsilon(t)=0;\quad E[\epsilon(t+\tau)\epsilon(t)]=\delta_{\tau,0}. \tag{5.74}$$

## 3.3　检测环信号的统计假设检验.

在以上分析信号 $s(t)$ 和 $n(t)$ 的基础上，我们认为记录到的信号，实质上是二者的叠加：

$$y(t)=s(t)+n(t),$$

其中 $s(t)$ 是确知的具有(5.69)或(5.70)形式的信号，$n(t)$ 是平稳正态噪声(正态分布的性质是基于别的检验得到的)，其相关函数如图 5.8 所示.

为了从 $y(t)$ 中检测出信号，我们特作如下的假设检验：

$$\begin{aligned} &H_0: y(t)=n(t), && 1\leqslant t\leqslant N,\\ &H_1: y(t)=s(t)+n(t), && 1\leqslant t\leqslant N. \end{aligned} \tag{5.75}$$

即有二种可能性：一个假定($H_0$)收到的 $y(t)$ 全是噪声，并无 $s(t)$ 信号；另一可能是($H_1$) $y(t)$ 中包含有信号 $s(t)$.

统计量：我们引入如下的极大信噪比滤波输出（见定理 5.4 及(5.57)式）

$$\hat{\zeta} = \zeta / \sigma_{\zeta}, \tag{5.76}$$

其中

$$\zeta = \sum_{k=1}^{N} y(t_k) s(t_k). \tag{5.77}$$

$\sigma_{\zeta}^2$ 是 $\zeta$ 的方差.

以下证明：在 $H_0$ 假设之下，$\hat{\zeta}$ 是遵从 $N(0,1)$ 的随机变量；尽管 $I_0$（见(5.70)）未知，$\hat{\zeta}$ 中不包含任何未知参数.

事实上：由数学期望 $E$ 的性质可知

$$\begin{aligned} E[\zeta] &= E\left[\sum_{k=1}^{N} y(t_k) s(t_k)\right] \\ &= \sum_{k=1}^{N} s(t_k) E[y(t_k)] \qquad (5.78) \\ &= 0. \ (\text{因为在 } H_0 \text{ 下 } E[y(t_k)] = E[n(t_k)] = 0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E[\zeta - E[\zeta]]^2 = E[\zeta]^2 \\ &= E\left[\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} s(t_i) s(t_j) y(t_i) y(t_j)\right] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} s(t_i) s(t_j) E[y(t_i) y(t_j)] \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} s(t_i) s(t_j) E[n(t_i) n(t_j)] \quad (\text{在 } H_0 \text{ 下}) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} s(t_i) s(t_j) R_{nn}(t_i - t_j). \ (\text{由 } n(t) \text{ 平稳性}) \end{aligned}$$

即

$$\sigma_{\zeta} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} s(t_i) s(t_j) R_{nn}(t_i - t_j)}. \tag{5.79}$$

由于 $\zeta$ 是 $\{y(t_i)\}$ 的有限组合，在 $H_0$ 下 $y(t_i)$ 皆为正态变量，它

们的组合也是正态的，故

$$\zeta \sim N\ (0,\ \sigma_\zeta^2)\quad 分布，$$

从而

$$\hat{\zeta} = \frac{\zeta}{\sigma_\zeta} \sim N(0,1)\ 分布. \tag{5.80}$$

于是可以选择一个临界值 $u_\alpha$（给定检验水平 $\alpha$ 之下）使得

$$P\{\hat{\zeta} > u_\alpha\} = \alpha. \tag{5.81}$$

为了增强在否定 $H_0$ 的结论（即认为有光环信号存在），使犯错误的可能性尽可能的小，我们选 $\alpha=0.01$. 由正态分布表可知

$$u_\alpha = 2.32. \tag{5.82}$$

又由（5.79）可以从记录中算出

$$\sigma_\zeta = 0.643. \tag{5.83}$$

将（5.82）和（5.83）代入（5.81）可得检验 $H_0$ 的否定域为

$$R_{0.01} = \{\zeta > u_\alpha \sigma_\zeta\} = \{\zeta > 1.49\}, \tag{5.84}$$

利用（5.77）和（5.84）即可对观测到的记录进行检验．对 $\{y(t)\}$ 用此法可得到一串 $\{t_{k_1},\ t_{k_2},\ \cdots,\ t_{k_m}\}$，统计学上认为

$$\{y(t_{k_1}),y(t_{k_2}),\cdots,y(t_{k_m})\} \tag{5.85}$$

不是纯噪声 $\{n(t_{k_i})\ ,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ M\}$，而是有信号.

为了进一步确认（5.85）中的信号是我们所要的光环信号 $s(t)$（即其数学表达式为（5.70）式），我们再引入一个统计量

$$\rho = \frac{\sum_{i=1}^{N} y(t_i)s(t_i)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} s^2(t_i)}\ \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N} y^2(t_i)}} \tag{5.86}$$

由第一章的定理 1.1 知道，$\rho$ 是 $\{y(t_i)\}$ 和 $\{s(t_i)\}$ 的样本相关系数. 当 $\rho$ 很大时表明 $\{y(t)\}$ 和 $\{s(t)\}$ 很相关或很相似；反之则无关. 通常有 0.85 以上的 $\rho$ 值就可认为 $\{y(t)\}$ 与 $\{s(t)\}$ 相似. 故从

(5.85)的序列中，再挑选满足$\{\rho\geqslant 0.85\}$的子集$\{t_{j_1},\cdots,t_{j_L}\}$，其中$L\leqslant M$. 这样实质上我们否定$H_0$而接受$H_1$的条件是

$$\{\zeta > 1.49;\quad \rho \geqslant 0.85\}. \tag{5.87}$$

而单独$\{\zeta>1.49\}$的概率已是0.01，可见(5.87)的出现概率将远<0.01.

必须说明的是：实用中计算极大信噪比滤波$\zeta$(见(5.77)式)是分段进行的，即将很长的记录分割为$T$段，每段$\{y(t),t=1,2,\cdots,N\}$的个数$N=120$，每一段都去算(5.77)的$\zeta$和(5.86)的$\rho$，当(5.87)满足时即认为本段观测存在光环信号. 读者不难看到不论是$\zeta$还是$\rho$，关键的统计量是

$$\sum_{i=1}^{N} y(t_i)s(t_i).$$

它的重要性就在于能使输出结果，尽可能大地突出信号—即极大信噪比，这点在定理5.4North的结果中已很清楚.

根据以上方法，对我国1977年3月10日对天王星的掩星观测记录，进行分段检测，总共分为31段，每段120数据. 检测出满足(5.87)条件的有如下信息：

掩星发生前：

| 参数 \ 环 | $\rho$ | $\zeta$ | $t$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0.923 | 2.37 | $20^h29^m54^s$ | 1.00 |
| $\beta$ | 0.883 | 1.50 | $20^h28^m01^s$ | 0.51 |
| $\gamma$ | 0.847 | 1.67 | $20^h24^m28^s$ | 0.58 |
| $\delta$ | 0.928 | 1.53 | $20^h23^m28^s$ | 0.66 |
| $\in$ | | | | 1.40 |

表5.3

掩星发生后

| 参数 / 环 | $\rho$ | $\zeta$ | $t$ | $D$ |
|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ | 0.951 | 2.33 | $21^h37^m34^s$ | 0.64 |
| $\beta$ | - | — | — | -- |
| $\gamma$ | 0.865 | 1.49 | $21^h42^m28^s$ | 0.69 |
| $\delta$ | 0.883 | 2.64 | $21^h43^m51^s$ | 0.97 |
| $\epsilon$ | — | — | — | 1.82 |

**表 5.4**

其中 $t$ 是指时间，$D$ 是所谓光学厚度，它们是由其它方法计算出来的，掩星发生后的 $\beta$ 信息没有找到，对照国外的记录发现在 $\beta$ 出现的时间段内，正好操作人员进行仪器上的校正工作，因前已述，观测人员并不知道有环信息，所以正好这期间没能进行观测记录，这是非常可惜的. $\epsilon$ 已进行其它天文学上的识别，已肯定是环信号，所以上述表中不再列入.

以上的结果表明：用统计方法我们在很强的噪声背景上检测到了比较弱的 5 个光环信息，从而证实了美国 KAO 实验室的结果.

然而，更重要的是：除了以上美国公布的环信息以外，我们的方法发现了另外一批环的信息，在《中国科学》[3] 出版的文献中，我们称它们为 $\lambda^*$，$\mu^*$ 和 $\gamma^*$ 信息，各参数如下：

| 参数 / 信　号 | $\rho$ | $\zeta$ | $t$ | $r$ (kM) |
|---|---|---|---|---|
| $\lambda^*$ | 0.889 | 1.74 | $20^h34^m11^s$ | 42570 |
| $\mu^*$ | 0.912 | 1.60 | $21^h33^m26^s$ | 42780 |
| $\gamma^*$ | 0.916 | 1.69 | $21^h41^m08^s$ | 47050 |

**表 5.5**

其中 r 表示该信息位置离天王星中心的距离，由 $\lambda^{*}$，$\mu^{*}$ 的 r 来看几乎相同或说比较接近，因而我们认为它们可能是天王星的第 6 个光环. 此外我们还发现一个独立的信息 $\gamma^{*}$，因没有检测到它的"对偶"信息，所以认为也许它是某个破碎的环的信息.

以上结论可见于《中国科学》1978，$V_o$l. 3，325，这在当时（结果是 1977 年）是最早发现天王星有不止五个环的. 文中断言：在 α 环内可能存在第六个环，并界于 β—γ 之间有 $\gamma^{*}$ 信息.

若干年前，美国的 Voyager-2 号宇宙飞船经过长距离的飞行，到达天王星附近时，拍回了许多照片，其中一张有关光环的照片发表在 NATURE，Vol. 348. 1990 年（见图 5.9）.

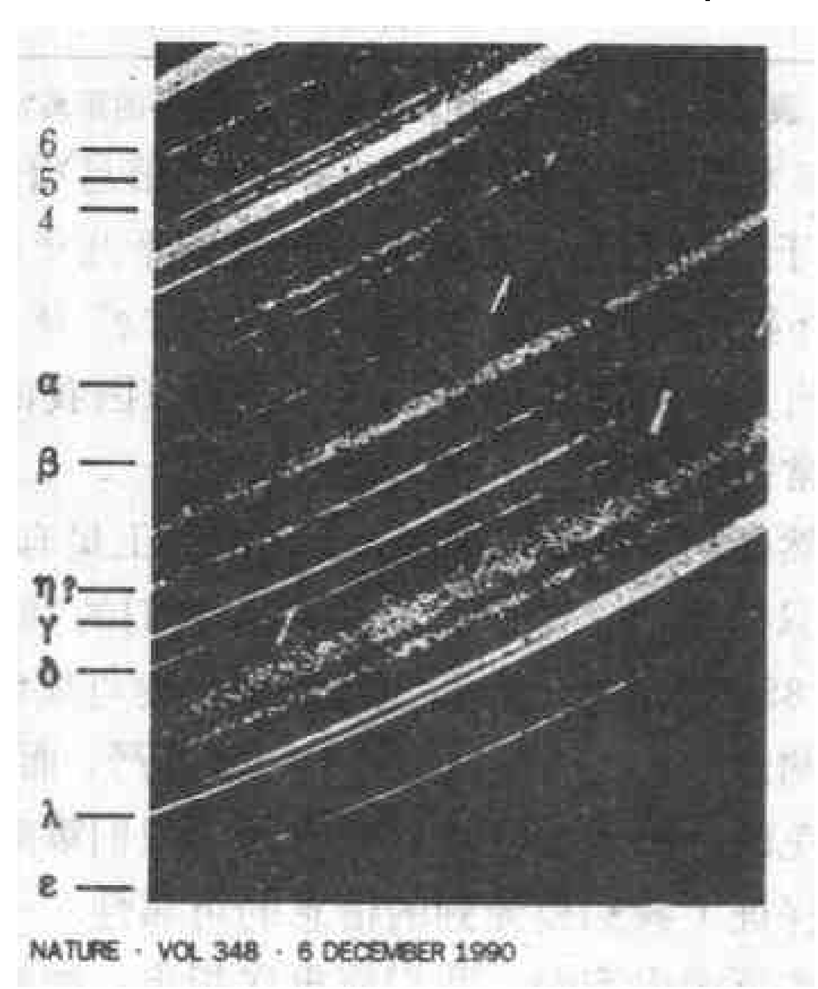



图 5.9 Voyager-2 拍回的有关天王星环的照片.（见 Carl D. Murray & Robert P. Thompson, Nature, Vol. 348. 6. Dec. 1990）.

从照片中可以看出总共天王星有 10 个光环，它们由里往外的取名为 6，5，4，α，β，η，γ，δ，ε. 各有关的环离天王星的

距离为（见：S. F. Dermoot，Phil. Trans. R. Soc. London，A 303（1981），当时还没有发现 $\lambda$，故下述表内无 $\lambda$ 的数值．注意：这里的 $\lambda$ 不是我们检测到的 $\lambda^*$．）

| 环　名 | $\epsilon$ | $\delta$ | $\gamma$ |
|---|---|---|---|
| 距离（Km） | 51181.7±33.3 | 48333.9±32.6 | 47657.3±32.5 |

| $\eta$ | $\beta$ | $\alpha$ | 4 |
|---|---|---|---|
| 47208.9±32.5 | 45695.6±32.4 | 44752.3±32.4 | 42600.1±32.3 |

| 5 | 6 |
|---|---|
| 42272.0±32.2 | 41865.5±32.1 |

**表 5.6**　（Dermott 计算的各光环到中心的距离）

将表 5.6 和我们检测到的 $\lambda^*$，$\mu^*$，$\gamma^*$ 信息相对照可知 $\lambda^*$-$\mu^*$ 显然相当于“4”号环，它确实如同我们十几年前算出的在 $\alpha$ 环以内；此外我们检测到的 $\gamma^*$ 应该相当于“$\eta$”环．当然，数值上虽有一些出入，但环的位置是没有错的（因我们在强噪声背景上检测非常微弱的信号，误差是难免的）．

读者自然会问：为何 Voyager-2 拍出天王星有 10 个环的信息，而我们只检测出 7 个呢？这是因为我们的判断是靠 $\{\zeta>1.49;\ \rho\geq 0.85\}$ 来进行的，而为确保结论的可靠性，我们选择非常严的检测水平，$P_r<0.01$．由于门限过严，而丢失了信号，这是不可避免的．因为噪声背景非常强，我们策略上是偏保守的．然而却保证了我们检测到的信息的可靠性．

在结束本章的内容时，我们应再次指出：能够成功检测天王星光环信号的关键是统计量

$$z(t)=\Sigma_k y(t_k)s(t-t_k).$$

而它正好来源于极大信噪比的滤波．

# 第六章 AR 模型拟合与 Deconvolution 滤波

## §0 问题的提出

在许多实际问题中，可以认为收到的信号 $x(t)$ 实质上已是“被滤波”过的

$$x(t) = \sum_{k} h_k u_{t-k}, \tag{6.1}$$

其中 $\{h_k\}$ 为滤波系数，$\{u_t\}$ 为原信号系列. 于是，人们关心的是：由 $\{x(t)\}$ 出发，是否能获得 $\{u_t\}$ 序列?

比如：在地震勘探中，$x(t)$ 相当于在用人工爆炸后某一检波器收到的（地面）地震波，它是综合叠加出来的复杂波形. 理论上就可以将它看为（6.1）的形式，其中 $\{h_k\}$ 称为小波，它相当于地球对单个冲击（爆炸）脉冲的响应，而 $u_t$ 序列则是小波于 $t$ 时刻到达该检波点的强度或更一般说是数因子. 而 $\{u_t\}$ 实质上带来了地下各反射地层结构的信息. 因此，地质工程师就十分关心，如何由 $\{x(t)\}$ 分解出 $\{u(t)\}$ 来，这就是 deconvolution 滤波（以下简称 D-滤波）.

又比如，在通信系统中，设想发射端发射的信号序列为 $\{u_t, t=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$，而在空间通道传播过程中，由于存

在不同的传播途径，经历不同的传播时间才达到同一地点（如同电视中可能直接由天线收到的信号，也可能经过许多建筑物反射或多次反射后方被收到），这样在 $t$ 时刻收到的可能是混杂的：有 $u_t$，也有前一时刻 $u_{t-1}$经反射收到的，也可能有更前一时刻经更长一点的途径到达的 $u_{t-2}$成分等等. 这样，在 $t$ 时刻收到的讯号 $y(t)$ 可表为

$$y(t) = h_0 u_t + h_1 u_{t-1} + h_2 u_{t-2} + \cdots \tag{6.2}$$

其中 $h_0$，$h_1$，$h_2$，…代表不同时刻的信号，经不同途径在传播过程中的损耗系数.

于是，通信中一大问题就是由诸 $\{y(t)\}$ 值出发如何恢复 $\{u_t\}$ 序列？这一问题同样是 D-滤波的问题. 当然，在实际问题中，可能 $\{h_k\}$ 是假定已知的，如在空间通信中，对空间物理的传播参数有事先的量测；然而，也有一些场合是未知的，此时由 $\{y(t)\}$ 观测出发也希望能估计出 $\{h_k\}$ 并且能给出 $\{u_t\}$ 序列.

本章将介绍的是运用近代时间序列分析的方法，如何进行这项工作，并将在最后一节介绍本章方法是如何用于地震勘探的.

# §1 熵、熵率与谱熵

## 1.1 熵—信息的度量.

为了以下理论的需要，也为了让读者能更清楚地理解以下模型拟合的理论背景，我们先介绍一些信息论中的一点结果和有关的概念.

**定义 6.1** （随机变量的熵） 设 $\xi$ 是离散型的随机变量，它遵从以下的概率分布

$$\xi \sim \begin{bmatrix} A_1, & A_2, & \cdots, & A_n \\ P_1, & P_2, & \cdots, & P_n \end{bmatrix}, \tag{6.3}$$

则称
$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} P_i \log P_i \tag{6.4}$$
为 $\xi$ 的熵.

我们先来解释（6.4）的含义. 我们知道，一个事件 $A$，如果它发生后能给人们带来信息，则 $A$ 必须是随机事件. 否则，如它是确定性的事件，人们事先已知道它会发生或者一定不发生，则它们的出现不会给人带来信息；因此 $A$ 发生给人们能带来的信息，一定和它发生的概率 $P(A)$ 有关.

其次，假定有二个事件，比如 $A_1=$｛本月气温无异常｝，$A_2=$｛本月将发生慧星与木星相撞｝，显然二者都是随机事件. 那么二者如发生，哪一件给人们带来更多的信息？显然，大家都认为 $A_2$ 带来的信息比 $A_1$ 更大更值得重视. 究其原因是因为 $P(A_2) \ll P(A_1)$. 由此可认为：小概率的事件，它发生后带来的消息一定是比大概率的信息大. 此外，小概率事件人们的敏感性应比大概率事件更强，因此通信工程师和信息论专家都建议用

$$-\log P(A) \tag{6.5}$$

来度量 $A$ 发生给人们带来的信息.（6.5）式中取负号的原因是因为 $0<P(A)<1$，故取 log 之后为一负值，这样 $-\log P(A)>0$ 才符合人们的信息量是“非负”的习惯.

对于一个随机变量 $\xi$，如果它的结果可能有 $n$ 种，各对应概

率为

$$P\{\xi = A_i\} = P_i,\ i = 1,2,\cdots,n. \tag{6.6}$$

那么要问："每做一次实验，$\xi$ 给人们带来多大的信息量？"

显然，我们不能用（6.6）中小概率或大概率所对应的信息量来度量．因小概率固然由（6.5）带来的信息量大，但 $\xi$ 的各次实验中它很可能很少出现；相反大概率的事件虽然经常出现，但带来的信息量又少．所以要衡量（6.6）的"平均信息量"就要兼顾二方面，为此对 $A_i$ 事件的估价是用

$$-P(A_i)\log P(A_i)$$

来估价其贡献．从而整体看（6.3）每次实验，平均给人们带来的信息量是

$$H(\xi) = -\sum_{i=1}^{n} P(A_i)\log P(A_i). \tag{6.7}$$

信息量也有单位，称为 Bit．它定义为

$$\xi \sim \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ \frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \tag{6.8}$$

的信息量，即

$$H(\xi) = -\left(\frac{1}{2}\log\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log\frac{1}{2}\right) = \log 2 = 1 \quad (\text{Bit}) \tag{6.9}$$

显见，此时 log 取以 2 为底的对数．

**例**　有二个随机变量 $\xi$，$\eta$ 它们的分布分别为

$$\xi \sim \begin{pmatrix} x_1, & x_2, & x_3 \\ 0.3, & 0.4, & 0.3 \end{pmatrix}$$

$$\eta \sim \begin{pmatrix} y_1, & y_2, & y_3 \\ 0.8, & 0.1, & 0.1 \end{pmatrix}. \tag{6.10}$$

试问：哪一个的熵大？

**解** $H(\xi)=-(0.3\log 0.3+0.4\log 0.4+0.3\log 0.3)$

$=1.571\quad(\text{Bit}).$

$H(\eta)=-(0.8\log 0.8+0.1\log 0.1+0.1\log 0.1)$

$=0.922.(\text{Bit})$

表明 $H(\eta)<H(\xi)$.

读者可以自己证明以下的结果：

**定理 6.1** 设随机变量 $\xi$ 的分布为

$$P\{\xi=x_i\}=P_i>0, i=1,2,\cdots,n. \tag{6.11}$$

且 $\sum_{i=1}^{n}P_i=1$，则

$$H(\xi)=-\sum_{i=1}^{n}P_i\log P_i\leqslant\log n. \tag{6.12}$$

"=" 成立的充分必要条件是 $P_1=P_2=\cdots=P_n=\frac{1}{n}$.

本定理告诉我们：离散型分布达到熵最大的是"均匀分布".

如果 $\xi$ 不是离散型的，而是连续型的，比如说，它有概率密度函数 $p(x)$，Shannon 定义 $\xi$ 的熵为

$$H(\xi)=-\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\log p(x)dx. \tag{6.13}$$

读者从初等微积分中知道，一般的概率密度函数 $p(x)\geqslant 0$，$\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$，并不能保证(6.13)的存在性. 所以(6.13)只能是对该积分存在的概率密度定义.

例如：$\xi$ 遵从 $N(0,\sigma^2)$ 分布，即它的概率密度为

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}},\ -\infty<x<+\infty \tag{6.14}$$

则 $H(\xi)=-\int_{-\infty}^{\infty}p(x)\log p(x)dx$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\cdot\log\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\right)dx$$

$$=-\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\left(-\log\sqrt{2\pi\sigma^2}-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)dx$$

$$=(\log\sqrt{2\pi\sigma^2})\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\cdot\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\int_{-\infty}^{\infty}x^2e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx$$

$$=(\log\sqrt{2\pi\sigma^2})+\left(\frac{1}{2\sigma^2}\right)\cdot\sigma^2 \tag{6.15}$$

$$=\log\sqrt{2\pi e\sigma^2}. \tag{6.16}$$

其中（6.15）的等式运用了如下二个结果：

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=\int_{-\infty}^{\infty}p(x)dx=1$；

(2) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}dx=D[\xi]=\sigma^2.$ (6.17)

由（6.16）可以看出正态分布的随机变量它的熵，即平均信息量只与方差 $\sigma^2$ 有关. 读者不难重新推导一下，当 $\xi$ 遵从 $N(a,\sigma^2)$，$a\neq0$，则

$$H(\xi)=\log(2\pi e\sigma^2)^{\frac{1}{2}} \tag{6.18}$$

仍然正确.

有趣的是我们问一个问题：在所有能使熵（6.13）存在的分布中，如果假定要求具有相同的方差 $\sigma^2$（给定），问：何种分布达到熵 $H_{\max}$最大？回答是：正态分布 $N(a,\sigma^2)$，且

$$H_{\max}=\log(2\pi e\sigma^2)^{\frac{1}{2}}.$$

对于 $n$ 维连续型的随机变量 $\underline{\xi}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$，假设它有联合密度函数 $p(\underline{x})=p(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，使

$$H(\underline{\xi})=\int_{R_n}\cdots\int p(\underline{x})\log p(\underline{x})d\underline{x} \tag{6.19}$$

存在，则称（6.19）为 $\underline{\xi}$ 的 $n$ 维熵.

**定义6.2** （随机过程的熵率） 设 $\xi(t)$ 是一个随机序列，对任意的 $(t_1, t_2, \cdots, t_n)$，$(\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n))$ 对应的由（6.19）定义的联合熵皆存在，且

$$H(\xi(t)) \triangleq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}H(\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_n)) \tag{6.20}$$

存在，则称 $H(\xi(t))$ 为 $\xi(t)$ 的熵率.

设想：如果我们把

$$(\xi(1), \xi(2), \cdots, \xi(n), \cdots)$$

看为一串电报，$\xi(i)$ 相当于“字母”，则

$$H(\underline{\xi})=H(\xi(1), \cdots, \xi(n))$$

相当于：每发一串 $n$ 个“字母”的电报给人们带来的平均信息量，则（6.20）的意义相当于“发一个字母，带来的平均信息量”即为熵率.

## 1.2 具有最大 $n$ 维熵的分布.

假定 $\underline{\xi}=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 是 $n$ 维随机变量，它的协方差矩阵（见定义1.9和（1.88）式）为

$$\Gamma_n=\begin{bmatrix}\sigma_{11}, & \sigma_{12}, & \cdots, & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21}, & \sigma_{22}, & \cdots, & \sigma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{n1}, & \sigma_{n2}, & \cdots, & \sigma_{nn}\end{bmatrix} \tag{6.21}$$

它是给定的对称正定矩阵 $\Gamma_n>0$. 我们以下要证明，具有最大熵的分布是 $n$ 维联合正态分布，即 $\underline{\xi}$ 的 $n$ 维概率密度是

$$p(\underline{x}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \frac{1}{(\det\Gamma_n)^{\frac{1}{2}}} e^{-\frac{1}{2}\underline{x}\Gamma_n^{-1}\underline{x}'}. \tag{6.22}$$

其中 $\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_n$，$\det\Gamma_n$ 为 (6.21) 矩阵所对应的行列式，$\Gamma_n^{-1}$ 为 $\Gamma_n$ 的逆矩阵，$\underline{X}'$ 为 $\underline{X}$ 的转置.

为了证明这一结论，我们先给出 K—L 信息量的定义：

**定义6.3** (Kullback-Leibler 信息量)　设 $p_1(x),p_2(x)$ 是共同定义在 $E,E\subset R_1$ 上的概率密度函数，并且 $p_1(x),p_2(x)>0,x\in E$，则称

$$I(p_1,p_2)=\int_E p_1(x)\log\frac{p_1(x)}{p_2(x)}dx \tag{6.23}$$

为 $(p_1,\ p_2)$ 的 K—L 信息量.

K—L 信息量具有以下的重要性质：

**定理6.2**　对 K—L 信息量，恒有

$$I(p_1,p_2)\geqslant 0, \tag{6.24}$$

而等号成立的充分必要条件是*

$$p_1(x)=p_2(x). \tag{6.25}$$

**证明**　首先指出，对 $y>0$，恒有

$$\log y\leqslant y-1 \tag{6.26}$$

成立，等号成立的充分必要条件是 $y=1$.

事实上，令

* 严格讲应是 $p_1(x)=p_2(x),a.e.[dx]$，即可以差一个 Lebesgue 的0测集.

$$f(y) = y - 1 - \log y,$$

则 $$f'(y) = 1 - \frac{1}{y},\ f'(1) = 0,$$

$$f''(y) = \frac{1}{y^2} > 0, (对\ y > 0).$$

以上表明 $f(y)$ 只有一个极小值点，即 $y=1$.

而 $f(1) = 0$,故 $f(y) \geqslant 0$. "=" 成立的充分必要条件是 $y=1$.

将以上结果用于 K—L 信息量的表达式（6.23）可得

$$\int_E p_1(x) \log \frac{p_2(x)}{p_1(x)} dx \leqslant \int_E p_1(x) \left[ \frac{p_2(x)}{p_1(x)} - 1 \right] dx$$

$$= \int_E (p_2(x) - p_1(x)) dx = 0. \qquad (6.27)$$

（6.27）最后的等号是由于 $p_1$、$p_2$ 皆为概率密度函数，它们的积分值都是1.

以上表明

$$\int_E p_1(x) \log \frac{p_2(x)}{p_1(x)} dx \leqslant 0.$$

或等价地 $$-\int_E p_1(x) \log \frac{p_2(x)}{p_1(x)} dx \geqslant 0,$$

即 $$I(p_1, p_2) = \int_E p_1(x) \log \frac{p_1(x)}{p_2(x)} dx \geqslant 0,$$

而等号成立的充分必要条件是

$$\frac{p_2(x)}{p_1(x)} = 1 \quad (a.e.[dx]). \quad \square$$

以下我们来给出以下论断：对具有相同协方差阵 $\Gamma_n$ 的 $n$ 维随机变量，能具有最大熵的分布是正态分布，定理完整的叙述和证明如下，对于矩阵代数不太熟悉的读者，只需明了定理的涵义和证明的大概线索或了解其证明的手法即可.

**定理6.3** 设$\underline{\xi}=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$是$n$维随机变量，有概率密度$p(\underline{x})>0$，$\underline{x}\in R_n$，其协方差阵为

$$\Gamma_n=\begin{bmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \cdots & \sigma_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \sigma_{n1} & \sigma_{n2} & \cdots & \sigma_{nn}\end{bmatrix}$$

它是对称正定阵$\Gamma_n>0$. 对给定的$\Gamma_n$，则使得$n$维随机变量$\underline{\xi}$具有最大熵（见(6.19)的分布当且仅当$\underline{\xi}$是$n$维正态分布$N(0,\Gamma_n)$，即其$n$维概率密度为

$$p(\underline{x})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^{\frac{n}{2}}\frac{1}{(\det\Gamma_n)^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\underline{x}\Gamma_n^{-1}\underline{x}'} \qquad (6.28)$$

此时达到的最大熵可表为

$$H_{\max}(\underline{\xi})=\log\left((2\pi e)^{\frac{n}{2}}(\det\Gamma_n)^{\frac{1}{2}}\right), \qquad (6.29)$$

其中$\underline{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in R_n$，$\det\Gamma_n$表$\Gamma_n$矩阵的行列式.

**证明** 不难看出定理6.2的结论在$n$维概率分布下也同样成立. 设$p_2(\underline{x})$为$N(0,\Gamma_n)$的正态分布密度，于是由(6.27)可知（以下为证明方便均假定$E\underline{\xi}=\underline{0}$）

$$\int_{R_n}p_1(\underline{x})\log\frac{p_2(\underline{x})}{p_1(\underline{x})}d\underline{x}$$
$$=\int_{R_n}p_1(\underline{x})\log p_2(\underline{x})d\underline{x}-\int_{R_n}p_1(\underline{x})\log p_1(\underline{x})d\underline{x}\leqslant 0$$

或$-\int_{R_n}p_1(\underline{x})\log p_1(\underline{x})d\underline{x}\leqslant-\int_{R_n}p_1(\underline{x})\log p_2(\underline{x})d\underline{x}$

$$=-\int_{R_n}p_1(\underline{x})\left[\log\left((2\pi)^{-\frac{n}{2}}(\det\Gamma_n)^{-\frac{1}{2}}e^{-\frac{1}{2}\underline{x}\Gamma_n^{-1}\underline{x}'}\right)\right]d\underline{x}$$

$$=\log\left((2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det\Gamma_n)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\int_{R_n}p_1(\underline{x})\ \underline{x}\Gamma_n^{-1}\underline{x}'d\underline{x} \qquad (6.30)$$

利用代数知识

$$\underline{x}\Gamma_n^{-1}\underline{x}' = \mathrm{tr}(\Gamma_n^{-1}\underline{x}'\ \underline{x}) \tag{6.31}$$

代入（6.30）得

$$-\int_{R_n} p_1(\underline{x})\log p_1(\underline{x})d\underline{x} = \log\left((2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det \Gamma_n)^{\frac{1}{2}}\right)$$

$$+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\int_{R_n}(\Gamma_n^{-1}\underline{x}'\ \underline{x})p_1(\underline{x})d\underline{x}\right.$$

$$=\log\left((2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det \Gamma_n)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\left(\Gamma_n^{-1}\int_{R_n}\underline{x}'\ \underline{x}p_1(\underline{x})d\underline{x}\right). \tag{6.32}$$

由定理的条件，$p_1(x)$ 的协方差阵为 $\Gamma_n$，而均值为零，故

$$\Gamma_n^{-1}\int_{R_n}\underline{x}'\ \underline{x}p_1(\underline{x})d\underline{x} = \Gamma_n^{-1}\left(\int_{R_n}x_ix_jp_1(x)dx\right)_{1\leqslant i,j\leqslant n} \tag{6.33}$$

$$=\Gamma_n^{-1}(\Gamma_n) = I_n. \tag{6.34}$$

表明（6.32）右端 tr( * ) 中的 * 为单位阵从而可得

$$-\int_{R_n} p_1(\underline{x})\log p_1(\underline{x})d\underline{x} \leqslant \log\left((2\pi)^{\frac{n}{2}}(\det \Gamma_n)^{\frac{1}{2}}\right)+\frac{1}{2}n$$

$$=\log\left((2\pi e)^{\frac{n}{2}}(\det \Gamma_n)^{\frac{1}{2}}\right) \tag{6.35}$$

而“=”成立的充分必要条件是

$$p_1(\underline{x}) = p_2(x) \sim N(0,\Gamma_n). \tag{6.36}$$

□

## 1.3 AR 模型的熵率与平稳随机序列的谱熵.

以下我们来研究随机过程（时间序列）的熵率，为具体化和实用化起见，我们只以 AR($p$) 模型为例来展开，事实上关于平稳过程的熵率还可以有更一般的结果.

首先，由 AR($p$) 模型定义知：设 $\xi(t)$ 是一个平稳序列，它

满足以下的随机差分方程

$$\xi(t) + \varphi_1\xi(t-1) + \cdots + \varphi_p\xi(t-p) = \theta_0\varepsilon(t), \quad (6.37)$$

则 $\xi(t)$ 称为是 AR($p$) 模型，其中 $\{1, \varphi_1, \cdots, \varphi_p\}$ 满足

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{p}\varphi_k z^k \neq 0, \ |z| \leqslant 1, (\varphi_0 = 1) \quad (6.38)$$

的实系数，$\theta_0 > 0$，而 $\{\varepsilon(t)\}$ 是标准白噪声列，$E\varepsilon(t) = 0$，$E\varepsilon(t)\varepsilon(s) = \delta_{t,s}$.

首先我们指出 AR($p$) 模型的相关函数

$$R(\tau) = E(\xi(t+\tau)\xi(t)) \quad (6.39)$$

必满足以下的 Yule—Walker 方程

$$\begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(p-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R(p) & R(p-1) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0^2 \\ \\ 0 \\ \\ \end{bmatrix} \quad (6.40)$$

事实上，由（6.37）方程

$$\sum_{k=0}^{p}\varphi_k\xi_{n+l-k} = \theta_0\varepsilon_{n+l}, \ n \geqslant 0. \quad (6.41)$$

两边乘以 $\xi_l$ 并求期望

$$E\Big[\sum_{k=0}^{p}\varphi_k\xi_{n+l-k}\cdot\xi_l\Big] = \theta_0 E[\varepsilon_{n+l}\cdot\xi_l] \quad (6.42)$$

$$\sum_{k=0}^{p}\varphi_k E[\xi_{n+l-k}\xi_l] = \theta_0 E[\varepsilon_{n+l}\cdot\xi_l]$$

$$\sum_{k=0}^{p}\varphi_k R(n-k) = \theta_0 E[\varepsilon_{n+l}\cdot\xi_l]. \quad (6.43)$$

然而由 $\xi_t = -(\varphi_1\xi_{t-1} + \varphi_2\xi_{t-2} + \cdots + \varphi_p\xi_{t-p}) + \theta_0\varepsilon_t$,

而 $\xi_{t-1} = -(\varphi_1\xi_{t-2} + \varphi_2\xi_{t-3} + \cdots + \varphi_p\xi_{t-1-p}) + \theta_0\varepsilon_{t-1}$,

$\xi_{t-2} = -(\varphi_1\xi_{t-3} + \varphi_2\xi_{t-3-1} + \cdots + \varphi_p\xi_{t-2-p}) + \theta_0\varepsilon_{t-2}$,

$\cdots$

使我们相信有表达式

$$\xi_t = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \varepsilon_{t-k}. \tag{6.44}$$

其中级数收敛的含义是余项 $E|\Delta_N|^2 \to 0$，$N \to \infty$.

而且
$$\begin{cases} C_0 = \theta_0, \\ C_1 = -\varphi_1 C_0, \\ C_2 = -\varphi_1 C_1 - \varphi_2 C_0, \\ \cdots \\ C_p = -\varphi_1 C_{p-1} - \varphi_2 C_{p-2} - \cdots - \varphi_p C_0, \\ C_l = -\sum_{s=1}^{p} \varphi_s C_{l-s}, \ l > p. \end{cases} \tag{6.45}$$

因此将(6.44)式运用于(6.43)的右边可得

$$\sum_{k=1}^{p} \varphi_k R(n-k) = \theta_0 E\left[\varepsilon_{n+l} \cdot \sum_{s=0}^{\infty} C_s \varepsilon_{l-s}\right], n \geqslant 0$$

$$= \theta_0 \sum_{s=0}^{\infty} C_s E[\varepsilon_{n+l} \cdot \varepsilon_{l-s}], n \geqslant 0. \tag{6.46}$$

利用 $\varepsilon_t$ 是白噪声的性质 $E\varepsilon_i\varepsilon_j = \delta_{i,j}$，则(6.46)只有 $n+l=l-s$ 时有非0值. 又由 $n \geqslant 0, s \geqslant 0$，则表明当 $n=0$时(6.46)右端只有一项 $\theta_0 \cdot C_0$，又由(6.45)知 $C_0 = \theta_0$故(6.46)的最终表达式为

$$\begin{cases} \sum_{k=0}^{p} \varphi_k R(n-k) = \theta_0^2, \ n = 0, \\ \sum_{k=0}^{p} \varphi_k R(n-k) = 0, \ n > 0. \end{cases} \tag{6.47}$$

取 $n=0,1,2,\cdots,p$，则(6.47)可写为(注意 $R(-k)=R(k)$)：

$$\begin{cases} R(0) + R(1)\varphi_1 + \cdots + R(p)\varphi_p = \theta_0^2, \\ R(1) + R(0)\varphi_1 + \cdots + R(p-1)\varphi_p = 0, \\ \quad \cdots\cdots \\ R(p) + R(p-1)\varphi_1 + \cdots + R(0)\varphi_p = 0. \end{cases} \tag{6.48}$$

将（6.48）写成矩阵形式即为 Yule-Walker 方程（6.40）.

以上我们已经得到了许多关于 AR（$p$）模型的结果，归纳如下：

**定理6.4** 设 $\xi(t)$ 是平稳 AR($p$) 模型，满足(6.37) 的方程，其系数$\{1,\varphi_1,\cdots,\varphi_p\}$满足(6.38) 的条件，则$\xi(t)$的相关函数 $R(k)$ 满足(6.47) 的方程组条件. 又 $\xi(t)$ 可表为

$$\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varepsilon(t-k), \tag{6.49}$$

并且有（6.45）递推公式成立.

以下我们来计算，当 $\xi$ ($t$) 是平稳正态 AR($p$) 模型时，它的熵率的表达式.

**定理6.5** 设 $\xi(t)$ 是正态平稳 AR($p$) 模型，其方程如(6.37) 所示，其系数满足(6.38) 条件，则依(6.20) 定义的熵率 $H(\xi(t))$ 存在，并可表为

$$H(\xi(t))=\log(\theta_0^2\sqrt{2\pi e}). \tag{6.50}$$

**证明** 由定理6.4知，由于 $\xi$ ($t$) 是 AR（$p$）模型，则它的协方差满足 Yule-Walker 方程

$$\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(p) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(p-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R(p) & R(p-1) & \cdots & R(0) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \theta_0^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{6.51}$$

记（6.51）左边的矩阵为 $R_{p+1}$，则（6.51）可写为

$$\boldsymbol{R}_{p+1}(1,\varphi_1,\cdots,\varphi_p)'=(\theta_0^2,0,\cdots,0)'. \tag{6.52}$$

由线性代数中的克拉姆法则知

$$1 = \begin{vmatrix} \theta_0^2 & R(1) & \cdots & R(p) \\ 0 & & & \\ \vdots & & \boldsymbol{R}_p & \\ 0 & & & \end{vmatrix} \Bigg/ \det R_{p+1}$$

$$1 = \frac{\theta_0^2 \det \boldsymbol{R}_p}{\det \boldsymbol{R}_{p+1}} \tag{6.53}$$

即 $$\theta_0^2 = C_0^2 = \det \boldsymbol{R}_{p+1} / \det \boldsymbol{R}_p \tag{6.54}$$

不难看出，对一般的 $N \geqslant p$ 皆有

$$C_0^2 = \det R_{N+1} / \det \boldsymbol{R}_N. \tag{6.55}$$

可见
$$\begin{aligned} \det R_N &= C_0^2 \det \boldsymbol{R}_{N-1} = \cdots \\ &= (C_0^2)^{N-p} \det \boldsymbol{R}_p, \end{aligned} \tag{6.56}$$

于是，由任意 $(\xi(t_1), \xi(t_2), \cdots, \xi(t_N))$ 遵从 $N(0, \boldsymbol{R}_N)$ 分布，其熵（见 (6.35)）

$$\begin{aligned} & H(\xi(t_1), \cdots, \xi(t_N)) = \log\left( (2\pi e)^{\frac{N}{2}} (\det \boldsymbol{R}_N)^{\frac{1}{2}} \right) \\ &= \frac{N}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \log(\det \boldsymbol{R}_N) \\ &= \frac{N}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \log((C_0^2)^{N-p} \det \boldsymbol{R}_p) \\ &= \frac{N}{2} \log(2\pi e) + \frac{N-p}{2} \log(C_0^2) + \frac{1}{2} \log(\det \boldsymbol{R}_p) \end{aligned} \tag{6.57}$$

可见
$$\begin{aligned} H(\xi(t)) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} H(\xi(t_1), \cdots, \xi(t_N)) \\ &= \frac{1}{2} \log(2\pi e) + \frac{1}{2} \log(C_0^2) \\ &= \log(\theta_0^2 \sqrt{2\pi e}). \quad \square \end{aligned} \tag{6.58}$$

其中(6.57)是运用了(6.56)AR($p$)模型的结果，而(6.58)

是用 $\theta_0 = C_0$ 的结论(见(6.45)).

由本定理

$$H(\xi(t)) = \log(\sqrt{2\pi e}) + \frac{1}{2}\log(\theta_0^2) \tag{6.59}$$

知:对 AR($p$) 模型,要它的熵率 $H(\xi(t))$ 大必须且只需 $\theta_0^2$大.

我们以下介绍一般 AR($p$) 模型的一条定理,其证明此处从略,有兴趣的读者可看谢衷洁(1990)的书.

**定理6.6** 设 $\xi(t)$ 是 AR($p$) 平稳序列,$f(\lambda)$ 是它的谱密度,则

$$\theta_0 = \sqrt{2\pi}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda\right\}. \tag{6.60}$$

将(6.60)的结果代入(6.59)可得

$$\begin{aligned} H(\xi(t)) &= \log(\sqrt{2\pi e}) + \log\left(\sqrt{2\pi}e^{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda}\right) \\ &= \log(\sqrt{2\pi e}) + \log(\sqrt{2\pi}) + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda \\ &= \log(2\pi) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda. \end{aligned} \tag{6.61}$$

(6.61)是正态 $AR$($p$)平稳列的熵率的另一个表达式,它表明:对这类模型,要它的熵率最大必须且只需

$$I(f) = \int_{\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda \tag{6.62}$$

最大. 工程上称 $I(f)$ 为 $\xi(t)$ 的谱熵.

# §2 极大熵准则下的模型拟合方法

## 2.1 问题的提出.

本节将要介绍近代观测数据的模型拟合问题和方法.

假设 $x_1$, $x_2$, …, $x_N$ 是对某平稳随机过程 $\xi(t)$ 的 $N$ 个观测，问：由这些观测值出发，如何对我们的观测对象 $\xi(t)$ 给它一个合理的数学模型的描述?

在第一章中已经介绍了平稳过程的概念，它是建立在二阶矩的认识的基础上的，而这类过程，对它的认识也是通过它的协方差函数 $R(k)$ 或它的谱密度 $f(\lambda)$ 来达到的.

由 $\xi(t)$ 的观测 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$，以前曾介绍过，由

$$R(k) = \frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N-k} x_l x_{l+k},\ k = 0,1,\cdots,M, \tag{6.63}$$

可以用来估计理论相关函数 $E\xi(k)\xi(0) = R_{\xi\xi}(k)$，$k=0, 1, 2, \cdots, M$，$M\leqslant N-1$.

假定对 $\xi(t)$，通过观测我们得到了它的协方差函数 $R(k)$，$k=0,1,2,\cdots,M$，$(M\leqslant N-1)$. 我们希望由样本 $\{x_1, x_2, \cdots, x_N\}$ 出发给 $\xi(t)$ 一个模型 $\eta(t)$，当然，如果 $\eta(t)$ 能比较精确地刻划 $\xi(t)$ 的性质，则我们有理由要求 $\eta(t)$ 的协方差 $R_{\eta\eta}(k)$ 应满足

$$R_{\eta\eta}(k) = R(k),\ k = 0,1,2,\cdots,M, \tag{6.64}$$

当然，只有(6.64)的要求还不够，因为这种 $\eta(t)$ 可能有许多，则我们如何去挑选一个"最好"的呢?

此时，我们想起了上一节介绍的信息准则. 因此，我们可以在满足(6.64)的所有 $\{\eta(t)\}$ 中挑选一个，它的熵率是最大的.

数学上的描述是：设 $R(0),R(1),\cdots,R(M)$ 是某个平稳列的 $M$ 个协方差值，它使得

$$\Gamma_{M+1}=\begin{pmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(M) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(M-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R(M) & R(M-1) & \cdots & R(0) \end{pmatrix} \tag{6.65}$$

为对称正定阵；又令

$$\mathscr{K}=\{y(t)\mid y(t)\text{ 是平稳列};R_{yy}(k)=R(k),k=0,1,\cdots,M\}. \tag{6.66}$$

如今希望从 $\mathscr{K}$ 中选一序列 $\eta(t)$，它的熵在 $\mathscr{K}$ 中是最大的：

$$H(\eta(t))=\operatorname*{Sup}_{y(t)\in\mathscr{K}}(H(y(t))). \tag{6.67}$$

问：这种 $\eta(t)$ 是什么样的随机序列？

首先，我们指出：虽然熵率最大这是很直观、很合理的准则，即希望“在具有 $M+1$个协方差值相合的条件下，每个观测（“字母”）带来的平均信息量是最大”的．但由定理6.6的（6.61）式，可知：要求具有最大熵率和要求具有最大谱熵

$$I(f)=\int_{-\pi}^{\pi}\log f(\lambda)d\lambda$$

是等同的．因此（6.67）可以改为找 $\eta(t)$ 使

$$I(f_{\eta\eta}(\lambda))=\operatorname*{Sup}_{y(t)\in\mathscr{K}}\left(\int_{-\pi}^{\pi}\log f_{yy}(\lambda)d\lambda\right). \tag{6.68}$$

以下我们考虑的 $y(t)$，不仅 $y(t)\in\mathscr{K}$，而且要求它的谱密度是 $\log f_{yy}(\lambda)$ 可积的．

2.2　问题的解答．

**引理6.1**　设 $\{r_k,\ k=0,\ \pm1,\ \cdots,\ \pm M\}$ 是实数列，满足 $r_k=r_{-k}$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ M$．令

$$f(z)=\sum_{k=-M}^{M} r_k z^k. \tag{6.69}$$

有
$$f(e^{-i\lambda})\geqslant 0,\ -\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi. \tag{6.70}$$

于是必存在实数（$\varphi_0$，$\varphi_1$，…，$\varphi_M$）使

$$f(e^{-i\lambda})=\left|\sum_{k=0}^{M}\varphi_k e^{-ik\lambda}\right|^2,\ -\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi. \tag{6.71}$$

**证明** 由 $f\left(\frac{1}{z_0}\right)=\sum_{k=-M}^{M} r_{-k} z_0^k=\sum_{k=-M}^{M} r_k z_0^k=f(z_0)$，(6.72)

$$f\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right)=\sum_{l=-M}^{M} r_{-l}\bar{z}_0^l=\overline{\left(\sum_{l=-M}^{M} r_l z_0^l\right)}=\overline{f(z_0)}, \tag{6.73}$$

即有
$$\overline{f\left(\frac{1}{z_0}\right)}=\overline{f(z_0)}=f\left(\frac{1}{\bar{z}_0}\right)=f(\bar{z}_0). \tag{6.74}$$

首先假设 $f(z)\neq 0$，$|z|=1$. 由（6.74），可知：若 $z_0$为根，则 $\bar{z}_0$，$\frac{1}{z_0}$，$\frac{1}{\bar{z}_0}$皆为 $f$ 的根.

由于 $f(z)$ 是$2M$ 阶多项式，故有$2M$ 个根，而 $z_0$，$(\bar{z}_0)^{-1}$，$\bar{z}_0$，$(z_0)^{-1}$可写成

$$z_0,(\bar{z}_0)^{-1};(\bar{z}_0),(\bar{\bar{z}}_0)^{-1}. \tag{6.75}$$

故$2M$ 个根可排成（若重根，每根算一次全排出来）.

$$z_1,(\bar{z}_1)^{-1};z_2,(\bar{z}_2)^{-1};\cdots;z_M,(\bar{z}_M)^{-1}, \tag{6.76}$$

其中可要求 $|z_i|>1(i=1,2,\cdots,M)$，否则若 $|z_0|<1$，则 $|\bar{z}_0|^{-1}=\frac{1}{|z_0|}>1$，二者可以互换.

于是可改写

$$f(z)=\sum_{k=-M}^{M} r_k z^k=\frac{1}{z^M}\sum_{k=-M}^{M} r_k z^{k+M} \tag{6.77}$$

$$=\frac{d}{z^M}\prod_{k=1}^{M}(z-z_k)\prod_{k=1}^{M}\left(z-\frac{1}{\bar{z}_k}\right)$$

$$= d\prod_{k=1}^{M}(z - z_k)\prod_{k=1}^{M}\left(1 - \frac{z^{-1}}{\bar{z}_k}\right). \tag{6.78}$$

$$f(e^{-i\lambda}) = \frac{(-1)^M d}{\prod_{j=1}^{M}(\bar{z}_j)}\prod_{k=1}^{M}(e^{-i\lambda} - z_k)\overline{\prod_{k=1}^{M}(e^{-i\lambda} - z_k)}$$

$$= \frac{(-1)^M d}{\prod_{j=1}^{M}(\bar{z}_j)}\left|\prod_{k=1}^{M}(e^{-i\lambda} - z_k)\right|^2, -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi. \tag{6.79}$$

又由 $f(e^{-i\lambda})>0$，$-\pi\leqslant\lambda\leqslant\pi$，则

$$D = \frac{(-1)^M d}{\prod_{j=1}^{M}(\bar{z}_j)} > 0, \tag{6.80}$$

故
$$f(e^{-i\lambda}) = \left|\sqrt{D}\prod_{k=1}^{M}(e^{-i\lambda} - z_k)\right|^2. \tag{6.81}$$

令
$$\Phi(z) = \sqrt{D}\prod_{k=1}^{M}(z - z_k). \tag{6.82}$$

由 $\{z_k\}$ 安排的次序看：其中或为实数，或其中有成对的共轭复数（见（6.76））. 因而（6.82）可写成

$$\Phi(z) = \sqrt{D}\prod_{j}(z - z_{k_j})\prod_{l}(z - z_{k_l})(z - \bar{z}_{k_l}). \tag{6.83}$$

其中 $z_{k_j}$为实数，$z_{k_l}$为复数. 然而

$$(z - z_{k_l})(z - \bar{z}_{k_l}) = z^2 - 2\mathrm{Re}(z_{k_l})z + |z_{k_l}|^2 \tag{6.84}$$

是实系数二阶多项式，进而 $\Phi(z)$ 是 $M$ 阶实系数多项式，可表为

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{M}\varphi_k z^k \neq 0, |z| \leqslant 1, \tag{6.85}$$

或 $$f(e^{-i\lambda}) = \left|\sum_{k=0}^{M}\varphi_k e^{-i\lambda}\right|^2, \quad -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi. \tag{6.86}$$

其次，若 $f(z)$ 在 $|z| = 1$ 上有 $s$ 个根，则(6.79) 应改为

$$f(e^{-i\lambda}) = \frac{(-1)^n d}{\prod_{j=1}^{n} \bar{z}_j}\left|\prod_{k=1}^{n}(e^{-i\lambda} - z_k)\right|^2 \times \prod_{l=1}^{S}(e^{-i\lambda} - e^{-i\alpha_l} - e^{i\alpha_l} + e^{i\lambda}). \tag{6.87}$$

其中 $\{e^{\pm i\alpha_l}, l = 1,2,\cdots,s\}$ 为单位圆上的根.

利用 $f(e^{-i\lambda}) \geqslant 0$，不难证明 (6.87) 中每个 $\alpha_l$ 必是偶数个，从而 (6.87) 中右端括号部分可写为

$$\left[\frac{1}{4}|e^{-i\lambda} - e^{i\alpha_l}|^2 \cdot |e^{-i\lambda} - e^{-i\alpha_l}|^2\right]^{m_l}$$

形式的连乘，因此亦可合并到 (6.87) 的前一部分写成模平方的形式. □

利用引理6.1我们可以来推导本节一开始提出来的(6.66)，(6.67) 的解答

首先，由第一章的 (1.125) 和 (1.126) 知道：协方差函数与谱密度是一对 Fourier 变换，故有

$$R(k) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\lambda} f(\lambda) d\lambda, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm M, \tag{6.88}$$

$$f(\lambda) = \frac{1}{2\pi}\sum_k R(k) e^{-ik\lambda}, \quad -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi. \tag{6.89}$$

于是引进 $\{\zeta_k, k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots, \pm M\}$ Lagrange 乘子，并令

$$J(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \log f(\lambda) d\lambda - \sum_{k=-M}^{M} \zeta_k \int_{-\pi}^{\pi} f(\lambda) e^{-ik\lambda} d\lambda \tag{6.90}$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \log f(\lambda) d\lambda - \left( \sum_{k=-M}^{M} \zeta_k e^{-ik\lambda} \right) f(\lambda) \right] d\lambda. \tag{6.91}$$

由于 $R(-k) = R(k)$，则$\{\zeta_k\}$可以适当减少，可设

$$\zeta_k = \zeta_{-k},\ k = 1,2,\cdots,M, \tag{6.92}$$

则由变分原理 $J(f)$ 达极值的条件是 $\delta J(f) = 0$，即

$$\delta J(f) = \int_{-\pi}^{\pi} \left[ \frac{1}{f(\lambda)} - \sum_{k=-M}^{M} \zeta_k e^{-ik\lambda} \right] \delta f(\lambda) d\lambda, \tag{6.93}$$

则 $\delta J(f) = 0$ 等价于上式方括号等于零，即

$$f(\lambda) = \frac{1}{\sum\limits_{k=-M}^{M} \zeta_k e^{-ik\lambda}}. \tag{6.94}$$

而利用 $f(\lambda) \geqslant 0, \zeta_k = \zeta_{-k}$ （实数）等条件，利用引理6.1的结果可得

$$f(\lambda) = \frac{1}{\left| \sum\limits_{k=0}^{M} \varphi_k e^{-ik\lambda} \right|^2},\ -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi. \tag{6.95}$$

或者写成时间序列分析常用的形式，可表

$$f(\lambda) = \frac{\theta_0^2}{2\pi \left| \sum\limits_{k=0}^{M} \phi_k e^{-ik\lambda} \right|^2},\ -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi. \tag{6.96}$$

则与（1.135）相比较可以看出，具有（6.96）的谱密度的平稳序列不是别的，正好是 AR($M$) 模型，其中，由引理6.1证明知当 $\log f(\lambda)$ 可积，则可要求

$$\Phi(z) = \sum_{k=0}^{M} \varphi_k z^k \neq 0,\ |z| \leqslant 1,$$

因为 $f(\lambda) > 0,\ -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi$，表明 $\Phi(e^{-i\lambda}) \neq 0$，（6.76）的诸根 $|z_i| > 1$.

由此可得以下关于极大熵准则下的模型拟合的重要定理：

**定理6.7** （极大熵模型拟合与谱估计） 设 $R(0), R(1), \cdots, R(M)$ 是某个平稳列的 $M+1$ 个协方差函数，它使得

$$\Gamma_{M+1} = \begin{bmatrix} R(0) & R(1) & \cdots & R(M) \\ R(1) & R(0) & \cdots & R(M-1) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R(M) & R(M-1) & \cdots & R(0) \end{bmatrix} \tag{6.97}$$

成为正定阵，则满足(6.66)并达到(6.67)的 $\eta(t)$ 是 AR($M$) 模型

$$\eta(t) + \varphi_1\eta(t-1) + \cdots + \varphi_M\eta(t-M) = \theta_0\varepsilon(t). \tag{6.98}$$

其中 ($\varphi_1$, $\varphi_2$, …, $\varphi_M$, $\theta_0^2$) 由以下 Yule-Walker 方程给出

$$\Gamma_{M+1}\begin{bmatrix} 1 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_0^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{6.99}$$

并且

$$f_\eta(\lambda) = \frac{\theta_0^2}{2\pi\left|\sum_{k=0}^{M}\varphi_k e^{-ik\lambda}\right|^2}, \quad -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi. \tag{6.100}$$

其中

$$\theta_0 > 0, \Phi(z) = \sum_{k=0}^{M}\varphi_k z^k \neq 0, \ |z| \leqslant 1. \tag{6.101}$$

定理6.7中的大部分结论已由前面证明，所缺的是：具有(6.100) 并满足 (6.101) 的谱密度，则它必是 AR($M$) 模型(6.98) 并且有 (6.99) 成立. 这些结论的证明留给读者.

## 2.3 从观测样本出发对平稳序列的模型拟合和谱估计.

以上定理6.7的出发点是：假定观测对象的协方差函数

$R(0), R(1), \cdots, R(M)$ 已知，在实用中我们做工作的出发点只能是 $N$ 个观测样本 $x_1$，$x_2$，…，$x_N$. 当然读者会想到在第一章中我们曾介绍过用样本协方差（1.109）

$$\hat{R}(\tau) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-\tau} x_k x_{k+\tau}, \quad \tau = 0,1,2,\cdots,m_N. \qquad (6.102)$$

来对 $R(\tau)$ 进行估计，其中 $m_N \ll N$.

读者需注意的是定理6.7是说：若能掌握观测对象的 $M+1$ 个协方差值，则拟合模型就取 AR($M$). 因此，理论上存在一个如何估计（6.102）中的 $m_N$ 的问题，或说：存在一个如何选择合理的拟合模型 AR（$m_N$）的阶数 $m_N$ 的问题，称为定阶问题.

以下介绍赤池的信息准则：

设 $x_1$，$x_2$，…，$x_N$ 是 $N$ 个观测样本，由（6.102）计算

$$\gamma_\tau \triangleq \hat{R}(\tau) \quad \tau = 0,1,2,\cdots,m_N. \qquad (6.103)$$

其中 $m_N = O(\sqrt{N})$，即取 $\sqrt{N}$ 的适当倍数，如2～3倍. 对$1 \leqslant s \leqslant m_N$，解以下 Yule-Walker 方程

$$\begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_s \\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{s-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \gamma_s & \gamma_{s-1} & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1^{(s)} \\ \vdots \\ \varphi_s^{(s)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0^2(s) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \qquad (6.104)$$

则可得

$$\begin{cases} \Psi_1 = \{1, \varphi_1^{(1)}, \theta_0^2(1)\}, \\ \Psi_2 = \{1, \varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \theta_0^2(2)\}, \\ \cdots\cdots \\ \Psi_s = \{1, \varphi_1^{(s)}, \varphi_2^{(s)}, \cdots, \varphi_s^{(s)}, \theta_0^2(s)\}, \end{cases} \qquad (6.105)$$

诸组参数.

令 $$\mathrm{AIC}(s) = \ln\theta_0^2(s) + 2\frac{s}{N}, 0 \leqslant s \leqslant m_N. \qquad (6.106)$$

其中 $\theta_0^2(0) = \gamma_0$. 于是取 AIC($s$)函数达到最小的 $s$ 值，设为 $p_N$，即

$$\mathrm{AIC}(p_N) = \min_{0 \leqslant s \leqslant m_N} \{\mathrm{AIC}(s)\}. \tag{6.107}$$

则确定 $p_N$ 为 AR 拟合的合理的阶数，并以 $\Psi_{p_N}$对应的参数为模型参数，即认为对观测对象的拟合模型为

$$\eta(t) + \varphi_1^{(p_N)}\eta(t-1) + \cdots + \varphi_{p_N}^{(p_N)}\eta(t-p_N) = \theta_0(p_N)\varepsilon(t). \tag{6.108}$$

其谱密度为

$$f_{\eta\eta}^{(N)}(\lambda) = \frac{\theta_0^2(p_N)}{2\pi\left|\sum_{k=0}^{p_N}\varphi_k^{(p_N)}e^{-ik\lambda}\right|^2}, \quad -\pi \leqslant \lambda \leqslant \pi. \tag{6.109}$$

如果在（6.107）式中有二个 $s$ 值，如 $p_1 \neq p_2$，使

$$\mathrm{AIC}(p_1) = \mathrm{AIC}(p_2) = \min_{0 \leqslant s \leqslant m_N} \{\mathrm{AIC}(s)\}. \tag{6.110}$$

设 $p_1 < p_2$，则取模型拟合的阶数为 $\mathrm{AIC}(p_1)$. 即所谓吝啬原则.

虽然 $p_N$ 理论上证明了它并不收敛到真值，(假定观测对象是 $\mathrm{AR}(p)$，$p_N \not\longrightarrow p$). 但大量的结果表明用 AIC 定出的阶 $p_N$，AR（$p_N$）都能很好地描述许多观测对象．也有人建议用

$$\mathrm{BIC}(s) = \ln\theta_0^2(s) + \frac{\ln N}{N}s, \quad 0 \leqslant s \leqslant m_N. \tag{6.111}$$

来定阶，并证明了这样定出的阶 $p_N$ 可收敛到真值.

以上有关的理论可见谢衷洁（1990）的有关章节.

## §3　用 AR($p$) 模型拟合进行 D- 滤波

### 3.1　AR($p$) 模型的逆转公式.

假设 $\xi(t)$，$t=0$，$\pm1$，$\pm2$，… 是 AR($p$) 模型，其方程

表为

$$\xi(t)+\varphi_1\xi(t-1)+\cdots+\varphi_p\xi(t-p)=\theta_0\varepsilon(t), \tag{6.112}$$

并
$$\Phi(z)=\sum_{k=0}^{p}\varphi_k z^k\neq 0,|z|\leqslant 1,\theta_0>0. \tag{6.113}$$

则 $\xi(t)$ 可表为

$$\xi(t)=\sum_{k=0}^{\infty}C_k\varepsilon(t-k). \tag{6.114}$$

其中 $\{C_k,k\geqslant 0\}$ 与$\{\theta_0,\varphi_1,\cdots,\varphi_p\}$ 的关系由（6.45）确定，（以上结果参看定理6.4）.

事实上，我们可以用以下的形式推导来看（6.114）：

设 $U$ 是推移算子 $U\xi_t=\xi_{t-1},U^k(\alpha\xi_t)=\alpha\xi_{t-k}$. 则（6.112）可写为

$$U^0\xi(t)+\varphi_1U^1\xi(t)+\varphi_pU^p\xi(t)=\theta_0\varepsilon(t),$$

或
$$[\Phi(U)]\xi(t)=\theta_0\varepsilon(t). \tag{6.115}$$

其中 $\Phi(0)$ 由（6.113）确定，则由（6.115）可得

$$\xi(t)=\frac{\theta_0}{\Phi(U)}\varepsilon(t). \tag{6.116}$$

如今对 $f(z)=\dfrac{\theta_0}{\Phi(z)}$,因(6.113) 性质,可以作 Taylor 展开

$$f(z)=\frac{\theta_0}{\Phi(z)}=\sum_{k=0}^{\infty}C_kz^k.$$

其中 $\{C_k\}$ 可由

$$\theta_0=\Phi(z)\sum_{k=0}^{\infty}C_kz^k \tag{6.117}$$

确定，显然它们正是（6.45）的方程组.

从（6.114）可以看出，AR($p$) 模型 $\xi(t)$，可以理解为是由一系列白噪声信号$\{\varepsilon(t)\}$经过以$\{C_k,k\geqslant 0\}$ 为滤波系数滤波后得到的输出，反之，由 AR($p$) 模型方程(6.112) 可以看出：如

果我们已知$\{\xi(t), t=0, \pm 1, \cdots\}$的值，而又已知它是AR($p$)模型(6.112)，则对$\{\xi(t)\}$进行D-滤波就变得很简单：

$$\begin{cases} \xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} C_k \varepsilon(t-k), \\ \varepsilon(t) = \frac{1}{\theta_0}\xi(t) + \frac{\varphi_1}{\theta_0}\xi(t-1) + \cdots + \frac{\varphi_p}{\theta_0}\xi(t-p). \end{cases} \tag{6.118}$$

这样，由观测$\{\xi(t)\}$可以依(6.118)进行滤波，并且可以用(6.45)估计出其中的$\{C_k, k \geqslant 0\}$，这点在许多实际问题中非常有用.

### 3.2 用AR($p$)拟合进行D-滤波.

我们以上介绍的是当$\varepsilon(t)$为白噪声序列，由$\xi(t)$进行D-滤波可得$\varepsilon(t)$. 但如果信号不是白噪声，则上述方法就不能用.

以下介绍一种实用的D-滤波的方法：设收到的是

$$y(t) = \sum_{k=0}^{M} h_k x(t-k), (M \text{ 已知}), \tag{6.118}$$

满足

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} h_k z^k \neq 0, |z| \leqslant 1. \tag{6.118$'$}$$

$\{h_k, k \geqslant 0\}$是未知参数，$x(t)$是平稳列可以表为

$$x(t) = \sum_{l=0}^{L} \theta_l \varepsilon(t-l), \theta_0 = 1.$$

$\{\theta_l, l=1,2,\cdots,L\}$为未知参数，而$L$已知.

从而

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{k=0}^{M} h_k \Big( \sum_{l=0}^{L} \theta_l \varepsilon(t-k-l) \Big) \\ &= \sum_{k=0}^{M} \sum_{l=0}^{L} h_k \theta_l \varepsilon(t-(k+l)). \end{aligned}$$

令 $\mu = k+l$，$k = \mu - l$，并不妨设$M \geqslant L$；

$$y(t) = \sum_{l=0}^{L} \sum_{\mu=l}^{M+L} h_{\mu-l}\theta_l \varepsilon(t-\mu)$$

$$= \sum_{\mu=0}^{M+L} b_\mu \varepsilon(t-\mu). \tag{6.119}$$

其中

$$b_\mu = \begin{cases} \sum_{l=0}^{\mu} \theta_l h_{\mu-l}, 0 \leqslant \mu \leqslant L; \\ \sum_{l=0}^{L} \theta_l h_{\mu-l}, L \leqslant \mu \leqslant M; \\ \sum_{l=\mu-M}^{L} \theta_l h_{\mu-l}, M \leqslant \mu \leqslant M+L. \end{cases} \tag{6.120}$$

此外，由 $y(t)$，设 $t=1, 2, \cdots, N$ 为观测点，则利用

$$\gamma_y(k) = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N-k} y(j)y(j+k),\ k=0,1,2,\cdots,m_N. \tag{6.121}$$

进行极大熵拟合可得 $\mathrm{AR}(p_N)$，设其系数为 $\{\theta_0^2, \varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_{p_N}\}$，并由此可推得

$$\eta(t) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s \varepsilon(t-s). \tag{6.122}$$

其中 $\{C_s, s \geqslant 0\}$ 由（6.45）所决定.

我们用 $\eta(t)$ 来代替(6.119) 可得

$$\sum_{\mu=0}^{M+L} b_\mu \varepsilon(t-\mu) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s \varepsilon(t-s). \tag{6.123}$$

则可得* $\quad C_0 = \theta_0 h_0, (\theta_0 = 1),$

$\quad C_1 = \theta_0 h_1 + \theta_1 h_0,$

$\quad \cdots\cdots$

---

* 因 $\varepsilon(t)$ 为标准白噪声列，则 $C_s = b_s$，$s \geqslant 0$.

$$C_L = \theta_0 h_L + \theta_1 h_{L-1} + \cdots + \theta_L h_0,$$
$$C_{L+1} = \theta_0 h_{L+1} + \theta_1 h_L + \cdots + \theta_L h_1,$$
$$\cdots\cdots$$
$$C_{L+M} = \theta_L h_M. \tag{6.124}$$

以上共有 $L+M+1$个方程组，而有 $L+(M+1)$ 个未知参数，由（6.124）可解得 $\theta_1$，$\theta_2$，…，$\theta_L$；$h_0$，$h_1$，…，$h_M$. 由此（6.118）式中的系数 $\{h_k, k=0, 1, \cdots, M\}$ 为可求.

再利用（6.118)′式及上一节中介绍的符号运算可知

$$y(t) = H(U)x(t), \tag{6.125}$$

$$x(t) = \frac{1}{H(U)}y(t) = \sum_{s=0}^{\infty} d_s y(t-s),\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots \tag{6.126}$$

其中 $\{ds, s \geqslant 0\}$ 由以下推出：

$$\begin{cases} d_0 = 1/h_0, \\ d_\mu = -\dfrac{1}{h_0}\sum\limits_{s=0}^{\mu-1} d_s h_{\mu-s}, & 1 \leqslant \mu \leqslant M, \\ d_\mu = -\dfrac{1}{h_0}\sum\limits_{s=\mu-M}^{\mu-1} d_s h_{\mu-s}, & M < \mu. \end{cases} \tag{6.127}$$

因此，(6.126)就是由 $\{y(t)\}$ 出发为获得信号序列$\{x(t)\}$ 所进行的 D-滤波. 其中最重要的一步就是利用极大熵模型拟合.

## §4 D-滤波在地震勘探中的应用

在本章一开始就提出了地震勘探中的一个问题. 假设在人工爆炸之后，地震波在地下经多次反射，许多波形的复合叠加

到达了地面的检波器，此时可认为收到的波形是

$$y(t)=\sum_{k=0}^{+\infty}b_k\varepsilon(t-k). \tag{6.128}$$

其中 $\{b_k,k\geqslant 0\}$ 被称为是小波，相当于地球对单个爆炸脉冲的响应，而 $\varepsilon(t)$ 是相互独立同分布的随机序列，是小波于 $t$ 时刻到达该检波器 的权重因子.

假定收到 $y(1),y(2),\cdots,y(N)$，如何去估计 $\{b_k\}$ 和 $\varepsilon(t)$?

例如，假定 $y(t)$ 的波形如图6.1所示：

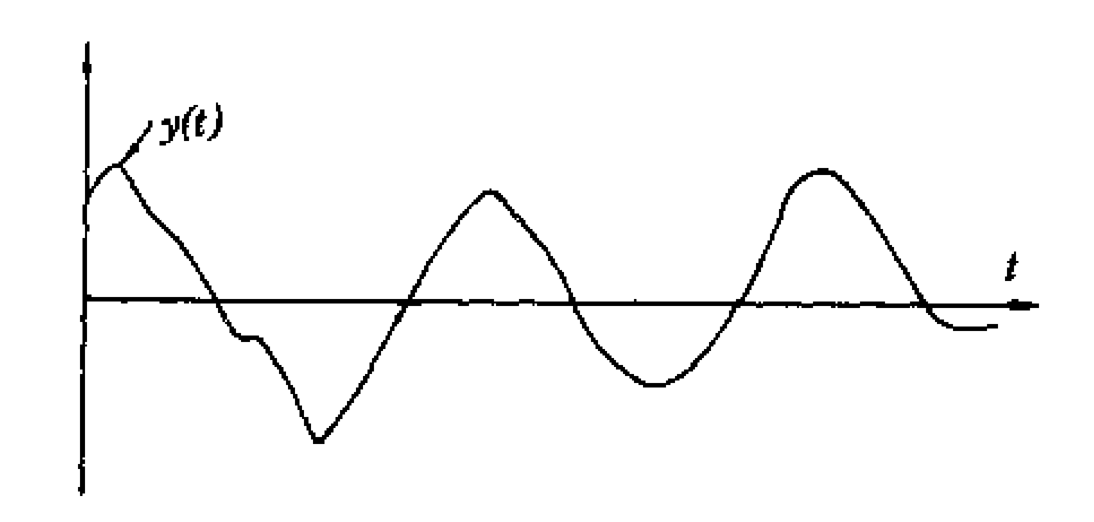



图6.1 收到的一段地震波 $y(t)$

将 $\{y(t)\}$ 按一定的间隔数值化以后，可得

$$y_1,y_2,\cdots,y_N,\quad (\text{此处 } N=56).$$

于是，利用极大熵模型拟合法，先令

$$\gamma_k=\frac{1}{N}\sum_{l=0}^{N-k}y_l y_{l+k},\ k=0,1,2,\cdots,15, \tag{6.129}$$

解 Yule-Walker 方程

$$\begin{pmatrix}\gamma_0 & \gamma_1 & \cdots & \gamma_s\\ \gamma_1 & \gamma_0 & \cdots & \gamma_{s-1}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \gamma_s & \gamma_{s-1} & \cdots & \gamma_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \varphi_1^{(s)}\\ \vdots\\ \varphi_s^{(s)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\theta_0^2(s)\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}. \tag{6.130}$$

并用 $\text{AIC}(S) = \ln\theta_0^2(s) + 2\frac{S}{N}, \quad 0 \leqslant s \leqslant 15$ (6.131)

进行判阶. 具体算出相关函数值为

$$
\begin{aligned}
&\gamma_0 = 123.4, \quad \gamma_1 = 114.6, \quad \gamma_2 = 97.38, \\
&\gamma_3 = 73.72, \quad \gamma_4 = 45.59, \quad \gamma_5 = 16.23, \\
&\gamma_6 = -13.58, \quad \gamma_7 = -40.01, \quad \gamma_8 = -61.31, \\
&\gamma_9 = -76.05 \quad \gamma_{10} = -83.94, \quad \gamma_{11} = -85.68, \\
&\gamma_{12} = -80.24, \quad \gamma_{13} = -67.55, \quad \gamma_{14} = -48.58, \\
&\gamma_{15} = -25.57.
\end{aligned}
\tag{6.132}
$$

用 AIC 判阶得

$$
\begin{aligned}
&\text{AIC}(0) = 4.816, \ \text{AIC}(1) = 2.773, \ \text{AIC}(2) = 2.479; \\
&\text{AIC}(3) = 2.309, \ \text{AIC}(4) = 2.359, \ \text{AIC}(5) = 2.400, \\
&\text{AIC}(6) = 2.346, \ \text{AIC}(7) = 2.402, \ \text{AIC}(8) = 2.470, \\
&\text{AIC}(9) = 2.525, \ \text{AIC}(10) = 2.563, \cdots, \ \text{AIC}(15) = 2.836.
\end{aligned}
\tag{6.133}
$$

可见最小 AIC 值在 $s=3$ 达到，即判阶数为 $p=3$.

在 $p=3$ 之下，$\text{AR}(p)$ 的诸参数为

$$
\begin{aligned}
&\varphi_0 = 1, \quad \varphi_1 = -1.2, \quad \varphi_2 = -0.0023, \\
&\varphi_3 = 0.4623, \quad \theta_0 = 2.848.
\end{aligned}
\tag{6.134}
$$

模型为

$$
\begin{aligned}
&y(t) + (-1.2)y(t-1) + (-0.0023)y(t-2) \\
&+ 0.4623y(t-3) = 2.848\varepsilon(t).
\end{aligned}
\tag{6.135}
$$

再利用 (6.45) 可以推出

$$
y(t) = \sum_{s=0}^{\infty} b_s \varepsilon(t-s) \tag{6.136}
$$

的各系数如下：

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $b_k$ | 2.848 | 3.4176 | 4.1076 | 3.6175 | 2.7670 | 1.4257 | 0.04128 |
| 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
| −1.2291 | −2.1354 | −2.5845 | −2.5368 | −2.0608 | −1.2814 | −0.3671 | 0.5113 |
| 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 |
| 1.2063 | 1.6189 | 1.7086 | 1.4951 | 1.0480 | 0.4695 | −0.1269 | −0.6367 |
| 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| −0.9819 | −1.1209 | −1.0524 | −0.8105 | −0.4557 | −0.0611 | 0.3010 | 0.5722 |
| 31 | 32 | 33 | 34 | 35 | 36 | 37 | 38 |
| 0.7158 | 0.7207 | 0.6014 | 0.3917 | 0.1375 | −0.1127 | −0.3164 | −0.4436 |
| 39 | 40 | 41 | 42 | 43 | 44 | 45 | 46 |
| −0.4809 | −0.4315 | −0.3134 | −0.1542 | 0.0141 | 0.1617 | 0.2656 | 0.3125 |
| 47 | 48 | 49 | 50 | 51 | 52 | 53 | 54 |
| 0.3007 | 0.2385 | 0.1421 | 0.0317 | −0.0720 | −0.1522 | −0.1976 | −0.2040 |
| 55 | 56 | | | | | | |
| −0.1748 | −0.1187 | | | | | | |

**表6.1** 小波系数 $\{b_s, s\geqslant 0\}$

其图形如图6.2所示.

显然，由（6.134）和（6.117）可知D-滤波系数为

$d_0=0.3511$，$d_1=-0.4213$，$d_2=-0.0008$，

$d_3=0.1626$，$d_s=0$，$s\geqslant 4$.

其反向图形如图6.3所示.

利用以上$\{d_k\}$系数,并对收到的$y(t)$(见图6.1)进行D-滤波,再进行判决就可得到一系列的$\{u(t)\}$值,为了验证这些结果

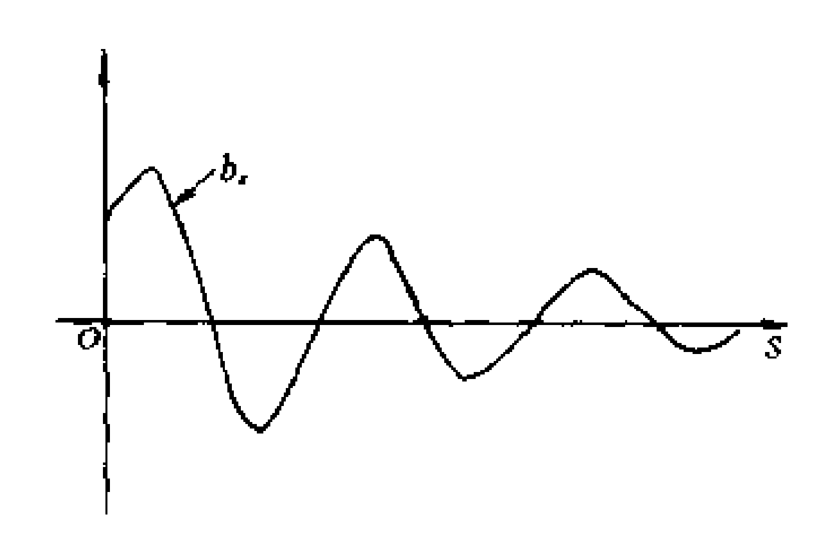



图6.2　由 $y(t)$ 用极大熵方法估算出的小波 $\{b_s, s\geq 0\}$

的正确性，我们可以将估计到的 $\{b_t, t\geq 0\}$ 值（见表 6.1）以及 $\{u(t)\}$ 值进行复原，即令

$$\hat{y}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} b_t u(t-u). \tag{6.137}$$

看看它与记录到的 $y(t)$ 的差异。如果二者波形差异较大就说明估计方法不好，应该作改进；如果波形基本相似就说明二者基本吻合，可以接受。

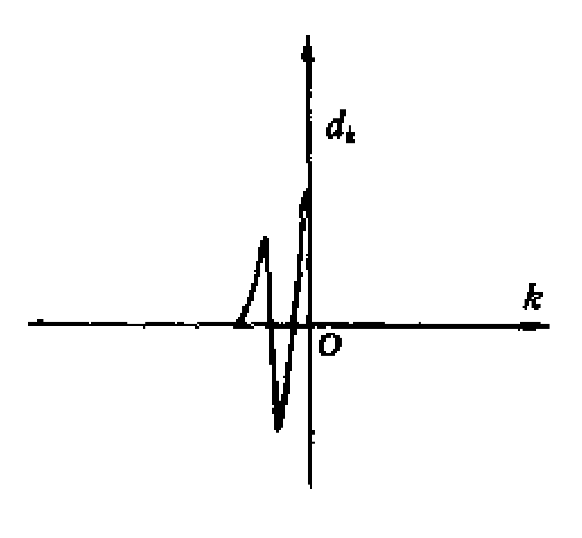
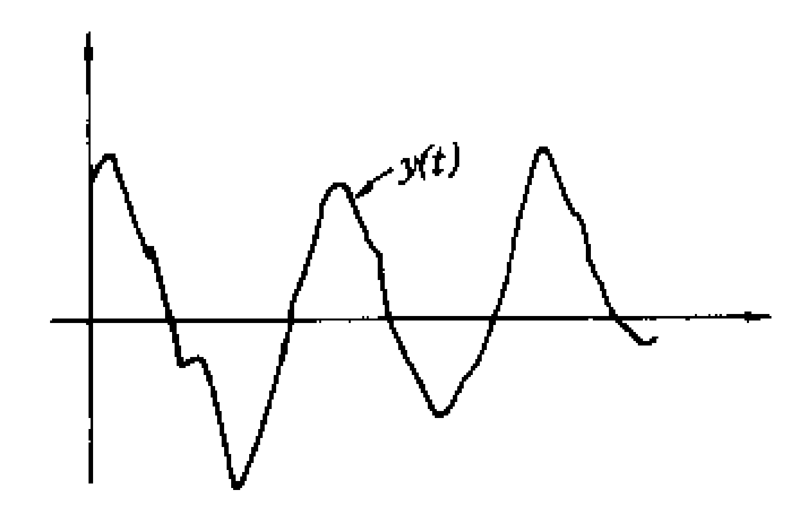



图6.3　D-滤波系数 $\{d_k\}$

运用以上结果，可以用（6.137）得到图6.4的下图 $\hat{y}(t)$，图6.3为图6.1的另一表示。

$\max f(k)=20$




$\max f(k)=5.688117$

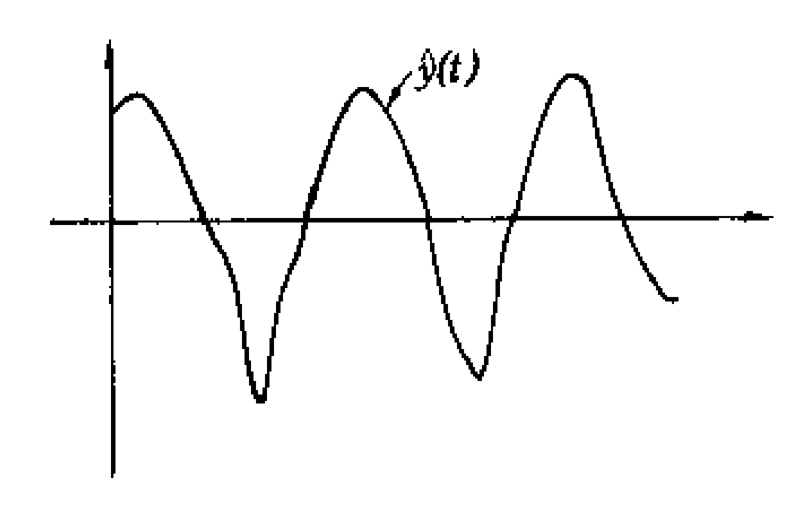



**图6.4** 原地震波记录 $y(t)$ 与理论恢复的波形 $\hat{y}(t)$

由图6.4可以看出二者虽在尺度比例上有些变化，但波形恢复得大致是相同的.

# 附录1 关于解 Yule-Walker 方程的递推算法（Levinson）

设 $R_0$，$R_1$，$R_2$，…，$R_p$ 是某个平稳序列 $x_t$ 的协方差函数，满足

$$\Gamma_{p+1} = \begin{pmatrix} R_0, & R_1, & \cdots, & R_p \\ R_1, & R_0, & \cdots, & R_{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_p & R_{p-1} & \cdots & R_0 \end{pmatrix} > 0, \tag{A.1}$$

即 $\Gamma_{p+1}$ 为正定阵，则称

$$\begin{pmatrix} R_0, & R_1, & \cdots, & R_p \\ R_1, & R_0, & \cdots, & R_{p-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_p, & R_{p-1}, & \cdots, & R_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \varphi_1 \\ \vdots \\ \varphi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \theta_0^2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.2}$$

为 Yule-Walker 方程.

显见，(A.2) 可分解为

$$\begin{pmatrix} R_0, & R_1, & \cdots, & R_{p-1} \\ R_1, & R_0, & \cdots, & R_{p-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{p-1}, & R_{p-2}, & \cdots, & R_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\varphi_1 \\ -\varphi_2 \\ \vdots \\ -\varphi_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \vdots \\ R_p \end{pmatrix} \tag{A.3}$$

和
$$\theta_0^2 = \sum_{l=0}^{p} \varphi_l^{(p)} R_l, \tag{A.4}$$

其中
$$\begin{cases} \varphi_0^{(p)} = 1, \\ \varphi_l^{(p)} = -\varphi_l, \quad l = 1,2,\cdots,p. \end{cases} \tag{A.5}$$

于是我们有以下基于递推关系的 Yule-Walker 方程的解法：

**定理 A.1** 设 $\Gamma_{p+1}>0$，则由

$$\Gamma_k\begin{pmatrix}\varphi_1^{(k)}\\ \varphi_2^{(k)}\\ \vdots\\ \varphi_k^{(k)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}R_1\\ R_2\\ \vdots\\ R_k\end{pmatrix} \tag{A.6}$$

组成的方程组有以下递推公式

$$\begin{cases}\varphi_1^{(1)}=\dfrac{R_1}{R_0},\\ \varphi_{k+1}^{(k+1)}=\left(R_{k+1}-\sum\limits_{j=1}^{k}R_{k+1-j}\varphi_j^{(k)}\right)\left(R_0-\sum\limits_{j=1}^{k}R_j\varphi_j^{(k)}\right)^{-1},\\ \varphi_j^{(k+1)}=\varphi_j^{(k)}-\varphi_{k+1}^{(k+1)}\cdot\varphi_{k+1-j}^{(k)},\ j=1,2,\cdots,k.\end{cases} \tag{A.7}$$

其中

$$\Gamma_k=\begin{pmatrix}R_0, & R_1, & \cdots, & R_{k-1}\\ R_1, & R_0, & \cdots, & R_{k-2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ R_{k-1}, & R_{k-2}, & \cdots, & R_0\end{pmatrix}. \tag{A.8}$$

**证明** 令

$$\begin{aligned}a_k'&=(R_1,R_2,\cdots,R_k),\\ \bar{a}_k'&=(R_k,R_{k-1},\cdots,R_1),\\ b_k'&=(\varphi_1^{(k)},\cdots,\varphi_k^{(k)}),\\ C_k'&=(\varphi_1^{(k)},\cdots,\varphi_{k-1}^{(k)}),\end{aligned} \tag{A.9}$$

及

$$\boldsymbol{T}=\begin{pmatrix} & 0 & & 1\\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \tag{A.10}$$

显然，有以下事实成立

$$
\begin{cases}
T^{-1} = T, \\
T\Gamma_k T = \Gamma_k, \\
Ta_k = \bar{a}_k,
\end{cases}
\tag{A.11}
$$

于是，Yule-Walker 方程可改写为

$$
\Gamma_{k+1} b_{k+1} = a_{k+1}, \tag{A.12}
$$

或

$$
\begin{bmatrix} \Gamma_k, & \bar{a}_k \\ \bar{a}_k', & R_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{k+1} \\ \varphi_{k+1}^{(k+1)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_k \\ R_{k+1} \end{bmatrix}. \tag{A.13}
$$

分块运算之后可得

$$
\begin{cases}
\Gamma_k C_{k+1} + \bar{a}_k \varphi_{k+1}^{(k+1)} = a_k, \\
\bar{a}_k' C_{k+1} + R_0 \varphi_{k+1}^{(k+1)} = R_{k+1}.
\end{cases}
\tag{A.14}
$$

由（A.14）的第一个方程可得

$$
C_{k+1} = \Gamma_k^{-1}(a_k - \bar{a}_k \varphi_{k+1}^{(k+1)}) \tag{A.15}
$$

$$
= b_k - \varphi_{k+1}^{(k+1)} \Gamma_k^{-1} \bar{a}_k
$$

$$
= b_k - \varphi_{k+1}^{(k+1)} \Gamma_k^{-1} T a_k. \tag{A.16}
$$

然而　$\Gamma_k^{-1} = T\Gamma_k^{-1}T$，故 $T\Gamma_k^{-1} = \Gamma_k^{-1}T$.

代入于（A.16）可得

$$
C_{k+1} = b_k - \varphi_{k+1}^{(k+1)} T \Gamma_k^{-1} a_k
$$

$$
= b_k - \varphi_{k+1}^{(k+1)} T b_k. \tag{A.17}
$$

将（A.17）代回（A.14）的第二个方程得

$$
R_{k+1} = \bar{a}_k'(b_k - \varphi_{k+1}^{(k+1)} T b_k) + R_0 \varphi_{k+1}^{(k+1)}
$$

$$
= \bar{a}_k' b_k - \bar{a}_k' T b_k \varphi_{k+1}^{(k+1)} + R_0 \varphi_{k+1}^{(k+1)}
$$

$$
= \bar{a}_k' b_k + (R_0 - \bar{a}_k' T b_k) \varphi_{k+1}^{(k+1)}. \tag{A.18}
$$

然而由（A.11）知

$$
Ta_k = \bar{a}_k,
$$

则　　$TTa_k = T\bar{a}_k$，而 $TT = I$，

或　　$a_k' = \bar{a}_k' T' = \bar{a}_k' T.$ 　　(A.19)

代回（A.18）得

$$R_{k+1}=\bar{a}_k{}'b_k+(R_0-a_k{}'b_k)\varphi_{k+1}^{(k+1)},$$

即 $$\varphi_{k+1}^{(k+1)}=(R_{k+1}-\bar{a}_k{}'b_k)(R_0-a_k{}'b_k)^{-1}. \tag{A.20}$$

将（A.9）的符号代入（A.20），

$$\varphi_{k+1}^{(k+1)}=\left(R_{k+1}-(R_k,R_{k-1},\cdots,R_1)\begin{pmatrix}\varphi_1^{(k)}\\ \vdots\\ \varphi_k^{(k)}\end{pmatrix}\right)\left(R_0-\sum_{l=1}^{k}\varphi_l^{(k)}R_l\right)^{-1}$$

$$\varphi_{k+1}^{(k+1)}=\left(R_{k+1}-\sum_{l=1}^{k}\varphi_l^{(k)}R_{k+1-l}\right)\left(R_0-\sum_{l=1}^{k}\varphi_l^{(k)}R_l\right)^{-1}. \tag{A.21}$$

又由（A.17）

$$\begin{pmatrix}\varphi_1^{(k+1)}\\ \varphi_1^{(k+1)}\\ \vdots\\ \varphi_k^{(k+1)}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_1^{(k)}\\ \varphi_2^{(k)}\\ \vdots\\ \varphi_k^{(k)}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0 & & 1\\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & 1 & \\ 1 & & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1^{(k)}\\ \varphi_2^{(k)}\\ \vdots\\ \varphi_k^{(k)}\end{pmatrix}\varphi_{k+1}^{(k+1)}$$

$$=\begin{pmatrix}\varphi_1^{(k)}\\ \varphi_1^{(k)}\\ \vdots\\ \varphi_k^{(k)}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\varphi_k^{(k)}\\ \varphi_{k-1}^{(k)}\\ \vdots\\ \varphi_1^{(k)}\end{pmatrix}\varphi_{k+1}^{(k+1)}. \tag{A.22}$$

将（A.22）写成分量形式即为

$$\varphi_j^{(k+1)}=\varphi_j^{(k)}-\varphi_{k+1}^{(k+1)}\cdot\varphi_{k+1-j}^{(k)},\quad j=1,2,\cdots,k. \tag{A.23}$$

（A.21）、（A.23）证明了本定理的结果. □

# 附录2　关于解Yule-Walker方程的 Burg递推公式

由于解 Yule-Walker 方程是对实测数据进行极大熵 AR 拟合的关键步骤，因而许多学者提出了自己的算法．上一附录中介绍的 Levinson 递推就是非常著名的公式．随后 Burg 提出他的算法，由于他的公式含有向前资料和向后资料的运用，因而许多场合结果比 Levinson 更精确．

首先我们来介绍对 Toeplitz 矩阵的 Wiggins-Robinson 叠代算法：

设有一线性方程组是

$$\begin{pmatrix} \gamma_0, & \gamma_1, & \cdots, & \gamma_n \\ \gamma_1, & \gamma_0, & \cdots, & \gamma_{n-1} \\ & & \ddots & \\ \gamma_n, & \gamma_{n-1}, & \cdots & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^{(n)} \\ \psi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \psi_n^{(n)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.24}$$

其中　$\alpha_n > 0$，$\psi_0^{(n)} = 1$.

$$\text{当 } n = 0\text{：} \alpha_0 = \gamma_0. \tag{A.25}$$

设第$(n-1)$次递推得参数 $(\alpha_{n-1}, \psi_k^{(n-1)}, k = 1, 2, \cdots, n-1)$，即：

$$\begin{pmatrix} \gamma_0, & \gamma_1, & \cdots, & \gamma_{n-1} \\ & \ddots & & \\ \gamma_{n-1}, & \gamma_{n-2}, & \cdots, & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.26}$$

则有

$$\begin{pmatrix} \gamma_0, & \gamma_1, & \cdots, & \gamma_{n-1}, & \gamma_n \\ & \ddots & & & \vdots \\ \gamma_{n-1}, & \gamma_{n-2}, & \cdots, & \gamma_0, & \gamma_1 \\ \gamma_n, & \gamma_{n-1}, & \cdots, & \gamma_1, & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ 0 \\ \alpha'_{n-1} \end{pmatrix} \tag{A.27}$$

及

$$\begin{pmatrix} \gamma_0, & \gamma_1, & \cdots, & \gamma_n \\ \gamma_1, & \gamma_0, & \cdots, & \gamma_{n-1} \\ \vdots & & & \\ \gamma_n, & \gamma_{n-1}, & \cdots, & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_0^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_n{}'_{-1} \\ \\ 0 \\ \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} \tag{A.28}$$

其中

$$\alpha_n{}'_{-1} = \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n-j} \psi_j^{(n-1)}. \tag{A.29}$$

令

$$k_{n-1} = -\alpha_n{}'_{-1}/\alpha_{n-1}, \tag{A.30}$$

则可得

$$\begin{pmatrix} \gamma_0, & \cdots, & \gamma_n \\ & \ddots & \\ \gamma_n, & \cdots, & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + k_{n-1} \begin{pmatrix} \gamma_0, & \cdots, & \gamma_n \\ & \ddots & \\ \gamma_n, & \cdots, & \gamma_0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_0^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} \\ 0 \\ \alpha_n{}'_{-1} \end{pmatrix} + k_{n-1} \begin{pmatrix} \alpha_n{}'_{-1} \\ 0 \\ \alpha_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{n-1} + k_{n-1}\alpha_n{}'_{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \tag{A.31}$$

由于

$$k_{n-1} = -\frac{\alpha_n{}'_{-1}}{\alpha_{n-1}} = -\frac{\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n-j} \psi_j^{(n-1)}}{\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \psi_j^{(n-1)}} \tag{A.32}$$

$$= \psi_n^{(n)}. \tag{A.33}$$

其中 (A. 33) 等号成立理由是由 Levinson 递推公式的 (A. 7)，注意这里 $\psi_n^{(n)}$ 和 (A. 7) 的 $\varphi_n^{(n)}$ 差一负号.

因此 $\alpha_{n-1} + k_{n-1}\alpha_n{}'_{-1}$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \psi_j^{(n-1)} + \psi_n^{(n)} \sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n-j} \psi_j^{(n-1)}$$

$$= \gamma_0 \psi_0^{(n-1)} + \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \psi_j^{(n-1)} + \sum_{l=1}^{n} \gamma_l \psi_{n-l}^{(n-1)} \psi_n^{(n)}$$

$$= \gamma_0 \psi_0^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \varphi_j^{(n-1)} + \sum_{l=1}^{n-1} \gamma_l \varphi_n^{(n)} \varphi_{n-l}^{(n-1)} - \gamma_n \varphi_n^{(n)} \tag{A.34}$$

$$= \gamma_0 \psi_0^{(n-1)} - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j [\varphi_j^{(n-1)} - \varphi_n^{(n)} \cdot \varphi_{n-j}^{(n-1)}] - \gamma_n \varphi_n^{(n)}$$

$$= \gamma_0 - \sum_{j=1}^{n-1} \gamma_j \varphi_j^{(n)} - \gamma_n \cdot \varphi_n^{(n)} = \gamma_0 + \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \psi_j^{(n)} = \alpha_n. \qquad (A.35)$$

其中（A.34）引入了符号 $\varphi_j^{(n)} = -\psi_j^{(n)}$.

再代回到（A.31）可得

$$\Gamma_{n+1} \left\{ \begin{pmatrix} \psi_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + k_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \right\} = \begin{pmatrix} \alpha_n \\ 0 \end{pmatrix} \qquad (A.36)$$

再由（A.24）知

$$\Gamma_{n+1} \left\{ \begin{pmatrix} \psi_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + k_{n-1} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_0^{(n-1)} \end{pmatrix} \right\} = \Gamma_{n+1} \begin{pmatrix} \psi_0^{(n)} \\ \psi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \psi_n^{(n)} \end{pmatrix}$$

由 $\Gamma_{n+1} > 0$，则

$$\begin{pmatrix} \psi_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ 0 \end{pmatrix} + \psi_n^{(n)} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_0^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0^{(n)} \\ \psi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \psi_n^{(n)} \end{pmatrix} \qquad (A.37)$$

由此可得

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \psi_0^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \end{pmatrix} + \psi_n^{(n)} \begin{pmatrix} 0 \\ \psi_{n-1}^{(n-1)} \\ \vdots \\ \psi_1^{(n-1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_0^{(n)} \\ \psi_1^{(n)} \\ \vdots \\ \psi_{n-1}^{(n)} \end{pmatrix} & (A.38) \\ \psi_n^{(n)} = - \dfrac{\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_{n-j} \psi_j^{(n-1)}}{\sum_{j=0}^{n-1} \gamma_j \psi_j^{(n-1)}} & (A.39) \end{cases}$$

由以上结果可以导出 Yule-Walker 方程的以下 Burg 递推公式：

$$n=0:\ \alpha_0=\hat{\gamma}_0=\frac{1}{N}\sum_{l=1}^{N}x_l^2=\sigma_0^2; \tag{A.40}$$

$$n=1:\ \begin{pmatrix}\alpha_1\\0\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}\hat{\gamma}_0, & \hat{\gamma}_1\\ \hat{\gamma}_1, & \hat{\gamma}_0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\ \psi_1^{(1)}\end{bmatrix} \tag{A.41}$$

$$=\begin{bmatrix}\hat{\gamma}_0, & \hat{\gamma}_1\\ \hat{\gamma}_1, & \hat{\gamma}_0\end{bmatrix}\left[\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+\psi_1^{(1)}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right] \tag{A.42}$$

$$=\begin{bmatrix}\hat{\gamma}_0\\ \hat{\gamma}_1\end{bmatrix}+\psi_1^{(1)}\begin{bmatrix}\hat{\gamma}_1\\ \hat{\gamma}_0\end{bmatrix}. \tag{A.43}$$

其中 (A.42) 运用了 Wiggins-Robinson 公式 (A.36)，其中的 $k_{n-1}$用 $\psi_n^{(n)}$ 代替.

由 (A.43) 可得：

$$0=\hat{\gamma}_1+\psi_1^{(1)}\hat{\gamma}_0,\ \text{或}\ \hat{\gamma}_1=-\psi_1^{(1)}\sigma_0^2, \tag{A.44}$$

和
$$\alpha_1=\hat{\gamma}_0+\psi_1^{(1)}\hat{\gamma}_1=\sigma_1^2,$$

或
$$\alpha_1=\sigma_1^2=\sigma_0^2+\psi_1^{(1)}(-\psi_1^{(1)})\sigma_0^2,$$

即
$$\sigma_1^2=\sigma_0^2(1-(\psi_1^{(1)})^2). \tag{A.45}$$

(A.44)、(A.45) 组成了 $n=1$的解，然而 $\psi_1^{(1)}$在这些公式中并没有确定. 统计学上认为它的选择应使得以下的“向前”一步预测和“向后”一步预测误差最小：设 $x_t$ 是 AR(1)，有方程

$$x_t+\psi_1^{(1)}x_{t-1}=\theta_0\varepsilon_t$$

则
$$E|x_t+\psi_1^{(1)}x_{t-1}|^2=\theta_0^2 \tag{A.46}$$

是向前预测一步误差；而

$$E|x_{t-1}+\psi_1^{(1)}x_t|^2 \tag{A.47}$$

相当于向后一步预测误差.

因此，我们选 $\psi_1^{(1)}$使得综合预测误差最小：

$$\min_{\psi_1^{(1)}}\left\{\frac{1}{2(N-1)}\left(\sum_{t=2}^{N}(x_t+\psi_1^{(1)}x_{t-1})^2+\sum_{t=2}^{N}(x_{t-1}+\psi_1^{(1)}x_t)^2\right)\right\} \tag{A.48}$$

即令

$$\frac{\partial}{\partial\psi_1^{(1)}}\left(\sum_{t=2}^{N}\left[(x_t+\psi_1^{(1)}x_{t-1})^2+(x_{t-1}+\psi_1^{(1)}x_t)^2\right]\right)=0$$

即导致 $$\psi_1^{(1)}=-\frac{2\sum_{t=2}^{N}x_t x_{t-1}}{\sum_{t=2}^{N}(x_t^2+x_{t-1}^2)}. \tag{A.49}$$

以上 $n=1$ 的推导思想可运用于一般 $n$ 到 $n+1$，其一般结果如下：

设第 $n$ 步 $\sigma_n^2$ 和 $\{\psi_1^{(n)},\psi_2^{(n)},\cdots,\psi_n^{(n)}\}$，$\{\hat{\gamma}_1,\hat{\gamma}_2,\cdots,\hat{\gamma}_n\}$ 已获得，则对 $n+1$：

$$\hat{\gamma}_{n+1}=\psi_{n+1}^{(n+1)}\sigma_n^2-\sum_{j=1}^{n}\psi_j^{(n)}\hat{\gamma}_{n+1-j}, \tag{A.50}$$

$$\sigma_{n+1}^2=(1-(\psi_{n+1}^{(n+1)})^2)\sigma_n^2 \tag{A.51}$$

$$\psi_j^{(n+1)}=\psi_{n+1}^{(n+1)}\cdot\psi_{n+1-j}^{(n)}-\psi_j^{(n)},\ j=1,2,\cdots,n \tag{A.52}$$

$$\psi_{n+1}^{(n+1)}=-\frac{2\sum_{t=n+2}^{N}\left(x_t+\sum_{j=1}^{n}\psi_j^{(n)}x_{t-j}\right)\left(x_{t-n-1}+\sum_{j=1}^{n}\psi_j^{(n)}x_{t-n-1+j}\right)}{\sum_{t=n+2}^{N}\left[\left(x_t+\sum_{j=1}^{n}\psi_j^{(n)}x_{t-j}\right)^2+\left(x_{t-n-1}+\sum_{j=1}^{n}\psi_j^{(n)}x_{t-n-1+j}\right)^2\right]} \tag{A.53}$$

(A.50) — (A.53) 加上 (A.40)、(A.44)、(A.45) 就构成了 Burg 从一组观测样本 $x_1,x_2,\cdots,x_N$ 出发解 Yule-Walker 方程的递推算法.

读者可以将 Levinson 递推与 Burg 递推相比较可以看出：Levinson 递推是事先对协方差函数 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_p$ 要有估计，比

如用

$$\hat{\gamma}_l = \frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N-l} x_s x_{s+l},\ l = 0,1,2,\cdots,p.$$

来估计，然后再递推，而 Burg 递推公式是一步一步地推出对 $\gamma_k$ 的估计，而且参数 $\{\psi_k^{(n)}\}$ 是使得最小二乘误差准则下达极小。这样 Burg 递推得到的结果就比 Levinson 精细.

一般地，如果样本 $N$ 不太大，比如<100，则 Burg 结果比 Levinson 好；假若 $N$ 比较大，则二者的结果差不多.

Burg 递推公式的最大不利之处在于它的算法属于非线性的，计算量比较大，而 Levinson 算法属于线性的，运算起来比 Burg 要快得多.

最后，我们指出：用 Burg 递推得到的 $AR$ 的系数 $\psi_j^{(n)}$，$j=1, 2, \cdots, n$ 同样能保证

$$\Psi(z) = 1 + \sum_{j=1}^{n}\psi_j^{(n)}z^j \neq 0, |z| \leqslant 1. \qquad (A.54)$$

并且得到的 $\{\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \cdots, \hat{\gamma}_n\}$ 所组成的矩阵

$$\Gamma_{n+1} = \begin{pmatrix} \hat{\gamma}_0, & \hat{\gamma}_1, & \cdots, & \hat{\gamma}_n \\ & \ddots & & \\ \hat{\gamma}_n, & \hat{\gamma}_{n-1}, & \cdots, & \hat{\gamma}_0 \end{pmatrix} \geqslant 0$$

是非负定的.

# 第七章 Kalman 滤波

## §1 问题的提出

1. 在生产过程、卫星导航、飞行器拦截等实际问题中都提出了控制优化的问题. 它们的共同特点是，比如以飞行器为例，它自己在空间的运动规律遵循一定的运动方程，但由于各种因素的作用，可能使飞行器在运动中偏离预定的规道. 因此在每一时刻都希望能了解该飞行器的位置、或者下一时刻可能的位置，然后给予最优的控制. 然而，如何能在每一时刻估算出飞行器的位置呢?需知，我们对该物体的监测是通过地面的观测数据来完成的；但是，就观测而言，由于量测仪器和其它一些随机因素的影响，观测值也往往是被“歪曲”的. 因此，数学上的任务就是如何通过这些不可避免的，受了“歪曲”的观测数据来把握原物体的运动规律，尽可能精确地估算出它的位置，并在这一基础上实现对该物体运动轨道的最佳控制. 这一数学问题在60年代、70年代成为非常热门的研究问题，而首先提出解决这一问题的方法的是 Kalman 和 Bucy (1961)，随后许多人加以完善化和推广. 而他们提出的方法通常称为 Kalman 滤波方法.

2. 数学上，以离散时间的问题为例，上面谈到的问题可以综合为以下共同的数学模型：

用 $X_t=(x_1(t),x_2(t),\cdots,x_p(t))'$ 来代表某物体在 t 时刻的运动状态（如空间位置、速度等），它的运动规律满足某个方程式，比如满足以下的差分方程

$$\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}_{k-1}+\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}_k. \tag{7.1}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是 $p\times p$ 的矩阵，可能不依赖于 $k$ 也可能依赖于 $k$；$\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{\Gamma}$ 都是 $p\times r$ 的矩阵；$\boldsymbol{u}_k$ 是影响运动物体在时刻 $k$ 的状态的控制向量参数，它是 $p\times 1$维的；$\boldsymbol{W}_k$ 称为模型噪声. (7.1) 称为该运动物体的模型方程.

对地面而言，利用各种仪器对该物体进行量测时，由于受各种因素的干扰，包括信号通过不同传播途径的影响等等，量测的结果是很复杂的，数学上一般用以下的方程来描述：设观测量为 $\boldsymbol{Y}_t$，它是 $m\times 1$的向量，可表为

$$\boldsymbol{Y}_t=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_t+\boldsymbol{v}_t \tag{7.2}$$

其中 $\boldsymbol{H}$ 是 $m\times p$ 的矩阵，可能依赖于 $t$ 也可能不依赖于 $t$，$\boldsymbol{v}_t$ 代表了在观测中带来的干扰，是 $m\times 1$维的向量，显然，$\boldsymbol{v}_t$ 和 $\boldsymbol{w}_t$ 是二种性质不同的干扰，因面是二种不同的噪声.

如今数学上的问题有二：

a. 由一组观测数据 $\{\boldsymbol{Y}_t,\ t=0,1,2,\cdots,N-1\}$，假定 $\boldsymbol{F}$、$\boldsymbol{H}$、$\boldsymbol{\Gamma}$ 已知，并且 $\boldsymbol{w}_t$，$\boldsymbol{v}_t$ 的统计性质也事先有了解的条件下，如何能最优地估计出 $\boldsymbol{X}_N$ 的向量值？

b. 给出某种准则下关于控制变量 $u_N$ 的最优值 $u_N^*$.

方程 (7.1) 和 (7.2) 联合在一起简称为“状态方程”. 由观测 $\{\boldsymbol{Y}_t,\ t=0,1,\cdots,N-1\}$ 去解决上述 $a$、$b$ 二个问题称为最优预测与最优控制问题. 如果 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{\Gamma}$，$\boldsymbol{H}$ 诸矩阵不依赖于观测时刻 $t$，就称为是“定常”的最优预测与最优控制问题；反

之则称为“时变”的．前者往往和平稳随机过程的理论相联系，而后者往往属于非平衡过程．

3．第六章中的 D-滤波问题与上述问题有关．事实上，(6.1) 的更一般的形式应是

$$y(t)=\sum_{k=0}^{\infty}h_k u(t-k)+v(t). \tag{7.3}$$

作为一种实用模型，当 $h_k\downarrow 0$的速度比较快时可以选 (7.3) 的观测模型为

$$y(t)=\sum_{k=0}^{p}h_k u(t-k)+v(t), \tag{7.4}$$

或者

$$y(t)=(h_0,h_1,\cdots,h_p)\begin{pmatrix}u(t)\\u(t-1)\\ \vdots\\u(t-p)\end{pmatrix}+v(t), \tag{7.5}$$

$$\boldsymbol{Y}(t)=\boldsymbol{H}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{v}(t) \tag{7.6}$$

其中 $\boldsymbol{Y}(t)=y(t)$ 是1×1标量序列，$\boldsymbol{H}$ 是 $1\times(p+1)$ 的定常矩阵，$\boldsymbol{u}(t)$是 $(p+1)\times 1$维的向量，$\boldsymbol{v}(t)$也是1×1的标量．假定 $\boldsymbol{u}(t)$是 $p+1$维 $AR(p+1)$ 模型，则它可表为

$$\boldsymbol{u}(t+1)=\boldsymbol{F}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{\varepsilon}(t). \tag{7.7}$$

于是，(7.6) 和 (7.7) 便构成了一对状态方程．由 $\{\boldsymbol{Y}(t)\}$ 出发，如何去恢复 $\boldsymbol{u}(t)$，也就是在第6章中我们所谈的 D-滤波的问题．这里所不同的是允许 (7.6) 的信号序列 $\boldsymbol{u}(t)$不是“白噪声”序列而可以是平稳随机信号序列．

和 (7.1) 相比，(7.7)中没有控制项(注意：(7.7)中的 $\boldsymbol{u}(t)$是信号项的模型，相当于(7.1)中的 $\boldsymbol{X}(t)$项)即 $B=0$．这类问题常常被称为纯滤波问题．

读者不难看出：(7.6) 方程或模型的建立是比较自然的，也已为研究人员所广泛采用；但是 (7.7) 的建立或更一般 (7.1) 的建立是需要作具体问题具体分析的工作——如何从 $X(t)$ 出发（即从它的观测样本出发）去建立 (7.1) 的方程涉及到建模问题，是一个比较专门的领域，有兴趣读者可参看 Aoki (1987) 的专著《State Space Modeling of Time Series》. 本书将介绍一种简单而实用的，建 (7.7) 的模型的方法.

本章主要介绍用矩阵的方法来解决上述 $a$、$b$ 问题，这种滤波方法是一种递推算法，称为 Kalman 滤波方法. 由于是一步步递推的，因而很容易推广到“非定常”的场合. 当然，读者很容易看出，Kalman 滤波中的一大问题是递推算法的收敛性和稳定性问题. 这里涉及到的数学问题也很深，这里不可能展开介绍，读者可参看中国科学院数学研究所概率组编的《离散时间系统滤波的数学方法》.

本章的末尾将运用 Kalman 滤波方法来解决散射通信中的多径效应问题（在许多问题中都存在类似的问题）及将它应用于心电图的整形.

## §2 Kalman 滤波的递推公式

### 2.1 Kalman 滤波的数学推导.

假设状态方程为

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}_k, \\ \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{v}_k \end{cases} \tag{7.8}$$

定常的，无控制项 $\boldsymbol{u}_k$ 的模型；其中 $\boldsymbol{Y}_k$ 是 $m$ 维列向量，$\boldsymbol{H}$ 是 $m\times p$

的矩阵，$v_t$ 也是 $m$ 维的列向量白噪声；$X_k$ 是 $p$ 维列向量，$F$ 是 $p\times p$ 的矩阵，$\Gamma$ 是 $p\times r$ 的矩阵，$W_k$ 是 $r$ 维的列向量白噪. 统计学上约定 $W_k$ 与 $v_k$ 有如下的关系：

$$EW_k = Ev_k = 0, \tag{7.9}$$

$$EW_k w_j' = Q\delta_{k,j}, \tag{7.10}$$

$$Ev_k v_j' = R\delta_{k,j}, \tag{7.11}$$

$$EW_k v_j' = 0. \tag{7.12}$$

并且已知初值 $X_0$，$EX_0=\mu_0$，$D(X_0) = P_0$(方差阵)，且

$$EX_0 W_k' = EX_0 v_k' = 0 \tag{7.13}$$

数学问题的提法是，在以上条件下，由 $X_0$，$\mu_0$，$P_0$和观测 $\{Y_j\}$ 出发，如何对 $X_n$ 进行估计?更简化的提法可假定 $X_0$是零均值的.

由递推的算法看：假定在 $k-1$时刻我们已经获得 对 $X_{k-1}$ 的最优估计值 $\hat{X}_{k-1}$；如今又在时刻 $k$ 观测到 $Y_k$，于是我们想用线性组合

$$A\hat{X}_{k-1} + BY_k \tag{7.14}$$

来估计 $X_k$，其中 $A$、$B$ 是二个待定矩阵，它的选择是使得以下的二次式

$$\Delta_k = E(X_k - (A\hat{X}_{k-1} + BY_k))(X_k - (A\hat{X}_{k-1} + BY_k))' \tag{7.15}$$

达极小. 这里所谓达极小的含义是：若选择别的矩阵 $\tilde{A}$，$\tilde{B}$，并代入 (7.15) 中 $A$，$B$ 的位置得

$$D_k = E(X_k - (\tilde{A}\hat{X}_{k-1} + \tilde{B}Y_k))(X_k - (\tilde{A}\hat{X}_{k-1} + \tilde{B}Y_k))' \tag{7.16}$$

则 $D_k-\Delta_k$ 是非负定矩阵，记为

$$D_k \geqslant \Delta_k. \tag{7.17}$$

为了选择最优的 $A$ 和 $B$，应注意以下事实

(1) 可将 (7.15) 中的 $X_k - A\hat{X}_{k-1} - BY_k$ 改写为:

$$
\begin{aligned}
X_k - A\hat{X}_{k-1} - BY_k &= FX_{k-1} + \Gamma W_k - A\hat{X}_{k-1} \\
&\quad - B[H(FX_{k-1} + \Gamma W_k) + v_k] \\
&= (I - BH)[F(X_k - \hat{X}_{k-1}) + \Gamma W_k] - Bv_k \\
&\quad + [(I - BH)F - A]\hat{X}_{k-1}.
\end{aligned} \tag{7.18}
$$

(2) 记

$$P_k = E[(X_k - \hat{X}_k)(X_k - \hat{X}_k)'], \tag{7.19}$$

$$\Pi_k = FP_{k-1}F' + \Gamma Q\Gamma', \tag{7.20}$$

则

$$
\begin{aligned}
\Delta_k &= E[X_k - A\hat{X}_{k-1} - BY_k][X_k - A\hat{X}_{k-1} - BY_k]' \\
&= (I - BH)\Pi_k(I - BH)' + BRB' \\
&\quad + [(I - BH)F - A](E\hat{x}_{k-1}\hat{x}_{k-1}') \\
&\quad \times [(I - BH)F - A]'.
\end{aligned} \tag{7.21}
$$

将 (7.21) 展开再配方可得

$$
\begin{aligned}
\Delta_k &= BH\Pi_kH'B' - BH\Pi_k - \Pi_kH'B' + \Pi_k + BRB' \\
&\quad + [(I - BH)F - A](E\hat{X}_{k-1}\hat{X}_{k-1}')[(I - BH)F - A]' \\
&= [B - \Pi_kH'(H\Pi_kH' + R)^{-1}](H\Pi_kH' + R) \\
&\quad \times [B - \Pi_kH'(H\Pi_kH' + R)^{-1}]' \\
&\quad + [\Pi_k - \Pi_kH'(H\Pi_kH' + R)^{-1}H\Pi_k] \\
&\quad + [(I - BH)F - A](E\hat{X}_{k-1}\hat{X}_{k-1}') \\
&\quad \times [(I - BH)F - A]'.
\end{aligned} \tag{7.22}
$$

(3) 在 (7.22) 的表达式中, 可表

$$\Delta_k = \mathrm{I} + \mathrm{II} + \mathrm{III},$$

其中 $\mathrm{I} = [B - \Pi_kH'(H\Pi_kH' + R)^{-1}](H\Pi_kH' + R)$

$$\cdot [B - \Pi_kH'(H\Pi_kH' + R)^{-1}]' \triangleq CDC'. \tag{7.23}$$

$$C = [B - \Pi_k H'(H\Pi_k H' + R)^{-1}] \tag{7.24}$$

$$D = (H\Pi_k H' + R) \tag{7.25}$$

由于 $R = Ev_k v_k'$,

则任意的向量 $\alpha$,均有

$$\alpha R\alpha' = \alpha(Ev_k v_k')\alpha'$$
$$= E(\alpha v_k)(\alpha v_k)' \geqslant 0. \tag{7.26}$$

表明 $R$ 是非负定的;同样,

$$\Pi_k = FP_{k-1}F' + \Gamma Q\Gamma'.$$

由于 $P_{k-1}$,$Q$ 皆为协方差阵,故 $\Pi_k \geqslant 0$(非负定矩阵),则由(7.25)可看出 $D$ 也是$\geqslant 0$的. 此外

$$\text{Ⅱ} = [(I - BH)F - A](E\hat{X}_{k-1}\hat{X}_{k-1})[(I - BH)F - A]'. \tag{7.27}$$

其中,中间项 $E\hat{X}_{k-1}\hat{X}_{k-1}' \geqslant 0$,故 Ⅱ $\geqslant 0$.

而

$$\text{Ⅲ} = \Pi_k - \Pi_k H'(H\Pi_k H' + R)^{-1}H\Pi_k. \tag{7.28}$$

其中不含待选矩阵 $A$ 和 $B$.

由 $\Delta_k \geqslant 0$,则由于(7.28)与 $A$,$B$ 无关,且 Ⅰ $\geqslant 0$,Ⅱ $\geqslant 0$,则"最小"的 $\Delta_k$ 是选 $A^*$,$B^*$ 使得 Ⅰ$^*=0$,Ⅱ$^*=0$,则此时

$$\Delta_k \geqslant \Delta_k^* = \text{Ⅲ} = \Pi_k - \Pi_k H'(H\Pi_k H' + R)^{-1}H\Pi_k \tag{7.29}$$

因为

$$\Delta_k - \Delta_k^* = \text{Ⅰ} + \text{Ⅱ} \geqslant 0 \tag{7.30}$$

因二个非负定阵相加仍为非负定阵.

(4)可见最佳的矩阵系数 $A^*$,$B^*$ 的选择是使

$$\text{Ⅰ}^* = C_{B^*}DC_{B^*}' = 0. \tag{7.31}$$

(参看 (7.23)；(7.24)，(7.25))．此时可取 $B^*$ 使

$$C_{B^*} = [B^* - \Pi_k H'(H\Pi_k H' + R)^{-1}] = 0 \tag{7.32}$$

或者
$$B^* = \Pi_k H'(H\Pi_k H' + R)^{-1}. \tag{7.33}$$

以后称
$$K_k \overset{\wedge}{=} B^* \tag{7.34}$$

另外，选 $A^*$ 使

$$\begin{aligned} \text{Ⅲ}^* = & [(I - BH)F - A^*](E\hat{X}_{k-1}\hat{X}_k{}'_{-1}) \\ & \times [(I - BH)F - A^*]' = 0. \end{aligned} \tag{7.35}$$

此时只需选

$$A^* = (I - B^*H)F = (I - K_k H)F \triangleq A_k. \tag{7.36}$$

显然，$K_k$ 和 $A^* = A_k$ 都与时刻 $k$ 有关．

## 2.2 Kalman 滤波的递推公式(纯滤波)．

由假设的(7.8)的一对状态方程出发，并假定满足(7.9)—(7.13)的条件；而其解的形式为线性形式(7.14)，则在使(7.15)达极小的准则下，预报系数矩阵 $K_k$ 和 $A_k$ 取为(7.34)与(7.36)形式．

假设从一组初值向量 $\hat{X}_0$，和初始误差阵 $P_0 = D(X_0)$，则 Kalman 滤波的递推公式如下：

① $$\hat{X}_k = F\hat{X}_{k-1} + K_k(Y_k - HF\hat{X}_{k-1}); \tag{7.37}$$

② $$K_k = \Pi_k H'(H\Pi_k H' + R)^{-1}; \tag{7.38}$$

③ $$P_k = (I - K_k H)\Pi_k; \tag{7.39}$$

④ $$\Pi_k = FP_{k-1}F' + \Gamma Q\Gamma'; \tag{7.40}$$

⑤ $$P_0 = D(X_0).$$

如果没有适当 $\hat{X}_0$，可取 $\hat{X}_0 = 0$，则

对 $k=1$，由 $P_0$代入④可得

$$\Pi_1 = FP_0F' + \Gamma Q\Gamma', \tag{7.41}$$

由②可得　$K_1 = \Pi_1 H'(H\Pi_1 H' + R)^{-1}$　(7.42)

由 $\boldsymbol{K}_1$ 可代入①得

$$\hat{\boldsymbol{X}}_1 = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{X}}_0 + \boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{Y}_1 - \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{X}}_0), \tag{7.43}$$

这样，由 $\hat{\boldsymbol{X}}_0$ 和 $k=1$ 时刻观测值 $\boldsymbol{Y}_1$ 可由（7.43）得到 $k=1$ 时刻的信号的最优估值 $\hat{X}_1$.

为了进行以下的递推，由 $\boldsymbol{K}_1$ 需要代入③得

$$\boldsymbol{P}_1 = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{H})\Pi_1. \tag{7.44}$$

对于 $k=2$，由 $\boldsymbol{P}_1$ 代入④可得 $\Pi_2$，又由②可得 $\boldsymbol{K}_2$，再代入①，结合 $k=2$ 的观测值 $\boldsymbol{Y}_2$，即可得

$$\hat{\boldsymbol{X}}_2 = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{X}}_1 + \boldsymbol{K}_2(\boldsymbol{Y}_2 - \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{X}}_1). \tag{7.45}$$

再将 $\boldsymbol{K}_2$ 回代于③，可得 $\boldsymbol{P}_2$，以便为 $k=3$ 作好方差阵的递推准备. 以下对 $k=3，4，\cdots$ 即可类推. 综合以上结果，可以将以上递推算法用图7.1表示之.

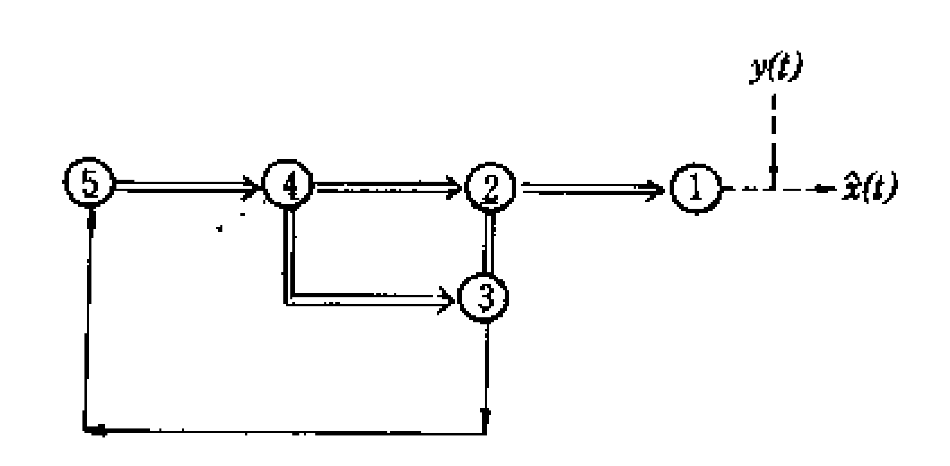



图7.1　Kalman 递推滤波算法框图

读者在以上⑤→①的计算过程中会发现最麻烦的计算应当数②式的 $\boldsymbol{K}_k$ 值，因为其中包含了对（$\boldsymbol{H}\Pi_k\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{R}$）求逆矩阵的手续，这是很麻烦的事.

然而我们可以来看看 $\boldsymbol{K}_k$ 的作用和意义. 由方程

$$\boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{k-1} + \Gamma\boldsymbol{W}_k, \tag{7.46}$$

及
$$Y_k = HX_k + v_k \tag{7.47}$$
来考查，由于$v_k$是白噪声列，我们无法作预测，因此，如果知道$X_k$、$H$则对$Y_k$的估计自然是（7.47）中略去$v_k$得到的$HX_k$. 再看（7.46)，也由于$\Gamma W_k$是噪声（干扰），则$X_k$也可以用$FX_{k-1}$来近似估计，因而当$X_{k-1}$用$\hat{X}_{k-1}$估计时，则对$Y_k$的粗略估计相当于是
$$\hat{Y}_k = HF\hat{X}_{k-1}, \tag{7.48}$$
因此
$$Y_k - HF\hat{X}_{k-1} \triangleq D_k. \tag{7.49}$$
相当于在$k$时刻，观测$Y_k$与估计值$\hat{Y}_k$二者的误差量（需知：此时于$k$时刻，观测值$Y_k$已获得，$\hat{X}_{k-1}$也是已估计的值）. 因而（7.37）可改写为
$$\begin{aligned}\hat{X}_k &= F\hat{X}_{k-1} + K_k(Y_k - HF\hat{X}_{k-1}) \\ &= F\hat{X}_{k-1} + K_kD_k.\end{aligned} \tag{7.50}$$
其中第一项$F\hat{X}_{k-1}$可视为直接运用状态方程(7.8)的第一式，略去噪声项对$\hat{X}_k$的估计；而（7.50）的第二项相当于“预测误差”的校正项，从而$K_k$是第$k$步，预测校正的系数，或简称为Kalman滤波的增益系数. 因此，为了减少计算的复杂性，许多应用工作者简化$K_k$的计算，甚至于一开始就对增益系数$K_k$定为一串常数矩阵. 以下，理论上我们将指出在一定条件下当$k\to\infty$时，取$K_k=K$有一定的合理性.

以上的递推公式显然是受（7.8）二个方程中噪声$W_k$和$v_k$的状况的影响的. 以$p=1$一维场合为例，则$R$、$Q$相当于噪声的方差(工程上与功率有关). 于是，由递推(2)、(4)看：

(1) 当$R$值变大时，一般$k_k$会变小. 表明在量测方程中，若量测噪声变大，滤波增益$K_k$应取小一些.

(2) 当$Q$值变大，往往$K_k$也会变大，因为$\Pi_k$增大.

## 2.3 非定常状态方程下的 Kalman 滤波.

以上讨论的是在方程（7.8）的条件下得到的结果.（7.8）中方程的系数 $\boldsymbol{F}$，$\boldsymbol{\Gamma}$，$\boldsymbol{H}$ 都不依赖于时刻 $k$. 但是，在许多问题中，它们可能会随着时间的推移而发生变化，即状态方程变为

$$\begin{cases} \boldsymbol{X}_k = \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{X}_{k-1} + \boldsymbol{\Gamma}_k \boldsymbol{W}_k, \\ \boldsymbol{Y}_k = \boldsymbol{H}_k \boldsymbol{X}_k + \boldsymbol{v}_k \end{cases}. \tag{7.51}$$

同样也假定类似以往对噪声 $\boldsymbol{W}_k$，$\boldsymbol{v}_k$ 的假设(见(7.9)—(7.13)诸条件). 则由 $\{\boldsymbol{Y}_k\}$ 如何去递推 $\{\boldsymbol{X}_k\}$ 的最优估计 $\{\hat{\boldsymbol{X}}_k\}$ 呢?

事实上读者不难发现，如果记

$$E\boldsymbol{W}_k\boldsymbol{W}_j' = \boldsymbol{Q}_k\delta_{k,j}, \tag{7.52}$$

$$E\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_j' = \boldsymbol{R}_k\delta_{k,j}, \tag{7.53}$$

及

$$\Pi_k = \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}_k' + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{\Gamma}_k' \tag{7.54}$$

则上一节中选择 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 矩阵的推导都可以平行地进行，从而得到最优的 $\boldsymbol{A}^*$、$\boldsymbol{B}^*$ 为

$$\boldsymbol{B}^* = \boldsymbol{K}_k = \Pi_k\boldsymbol{H}_k'(\boldsymbol{H}_k\Pi_k\boldsymbol{H}_k' + \boldsymbol{R}_k)^{-1}, \tag{7.55}$$

$$\boldsymbol{A}^* = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\boldsymbol{F}_k. \tag{7.56}$$

此时有类似（7.37）—（7.40）的递推关系：

$$\boldsymbol{P}_k = E(\boldsymbol{X}_k - \hat{\boldsymbol{X}}_k)(\boldsymbol{X}_k - \hat{\boldsymbol{X}}_k)' = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}_k)\Pi_k, \tag{7.57}$$

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k = \boldsymbol{F}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{H}_k\boldsymbol{F}_k\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}), \tag{7.58}$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{K}_k = \Pi_k\boldsymbol{H}_k'(\boldsymbol{H}_k\Pi_k\boldsymbol{H}_k' + \boldsymbol{R}_k)^{-1}, \\ &\Pi_k = \boldsymbol{F}_k\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}_k' + \boldsymbol{\Gamma}_k\boldsymbol{Q}_k\boldsymbol{\Gamma}_k', \end{aligned} \tag{7.59}$$

$$\boldsymbol{P}_0 = D(\boldsymbol{X}_0).$$

而递推的程序和图7.1是完全类似的.

## 2.4 关于 Kalman 滤波的发散问题.

从图7.1及相应的算法可以看出，我们是从一个初值出发依

Kalman 滤波的递推程序一步步外推的. 凡是这种叠代或递推都存在一个“最后推到何方”?是接近真值还是偏离真值?如果是随机信号，则可问它的误差阵 $P_k$ 会不会发散?

例如：假定我们的模型为一维的

$$\begin{cases} X_k = FX_{k-1} + \alpha, \\ y_k = HX_k + v_k, \end{cases} \tag{7.60}$$

其中 $H=F=1, \alpha=3, Q=0, v_k \sim iid\ Ev_k=0, D(v_k)=R=1$. 初值从 $X_0=1$ 出发，假定 $P_0$未知，用一个比较大的数来估计，如 $P_0=100$，则（(7.37)—(7.40) 诸式可具体化为

$$P_0 = 100, \tag{7.61}$$

$$\Pi_k = P_{k-1}, \tag{7.62}$$

$$P_k = (1 - K_k)P_{k-1}, \tag{7.63}$$

$$K_k = \Pi_k(\Pi_k + 1)^{-1} = \frac{P_{k-1}}{1 + P_{k-1}}, \tag{7.64}$$

或

$$P_k = K_k. \tag{7.65}$$

设想对 $\alpha$ 没有估准取 $\beta \neq \alpha$ 代替之，则

$$\hat{X}_k = (\hat{X}_{k-1} + \beta) + K_k(Y_k - (\hat{X}_{k-1} + \beta)). \tag{7.66}$$

以 $\alpha=3$，$\beta=1$为例，对 $n=1024$次递推的结果 $K_k$，$P_k=D(X_k-\hat{X}_k)$（误差方差）等各值的变化情况如下：

| $k$ | $X(k)$ | $K_k$ | $P_k$ |
|---|---|---|---|
| 2 | 6 | 0.3333 | 3.2307 |
| 4 | 12 | 0.2000 | 1.2885 |
| 8 | 24 | 0.1111 | 0.38969 |
| 16 | 48 | 5.8823 E-2 | 42.3301 |
| 32 | 96 | 3.0303 E-2 | 399.568 |

续表

| $k$ | $X(k)$ | $K_k$ | $P_k$ |
|---|---|---|---|
| 64 | 192 | 1.5384 $E$-2 | 2436.807 |
| 128 | 384 | 7.7519 $E$-3 | 12233.29 |
| 256 | 768 | 3.8910 $E$-3 | 55634.63 |
| 512 | 1536 | 1.9493 $E$-3 | 239285.7 |
| 1024 | 3072 | 9.7560 $E$-4 | 996775.6 |

**表7.1**

为了更直观地了解 $K_k$ 和 $P_k$ 的变化，对 $K_k$ 取 $k=1, 2, \cdots, 100$. 其变化图形如图7.2所示；对误差方差 $P_k$，$k=1, 2, \cdots, 200$，其增长的趋势如图7.3所示.

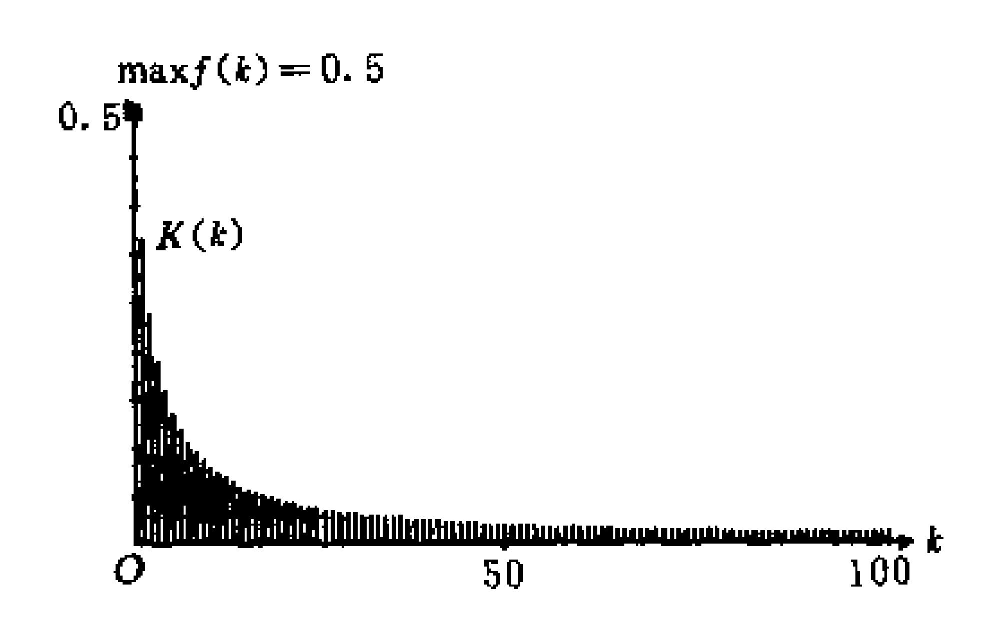



**图7.2　增益系数 $K(k)$的变化趋势**

从图7.2和图7.3可以看出 $K_k$ 增益系数递减得非常快，而误差方差增加得也太快，事实上，从上面计算的 $K_k$ 值可以看出当 $k$ 较大时

$$K_k \approx \frac{1}{k}, \tag{7.67}$$

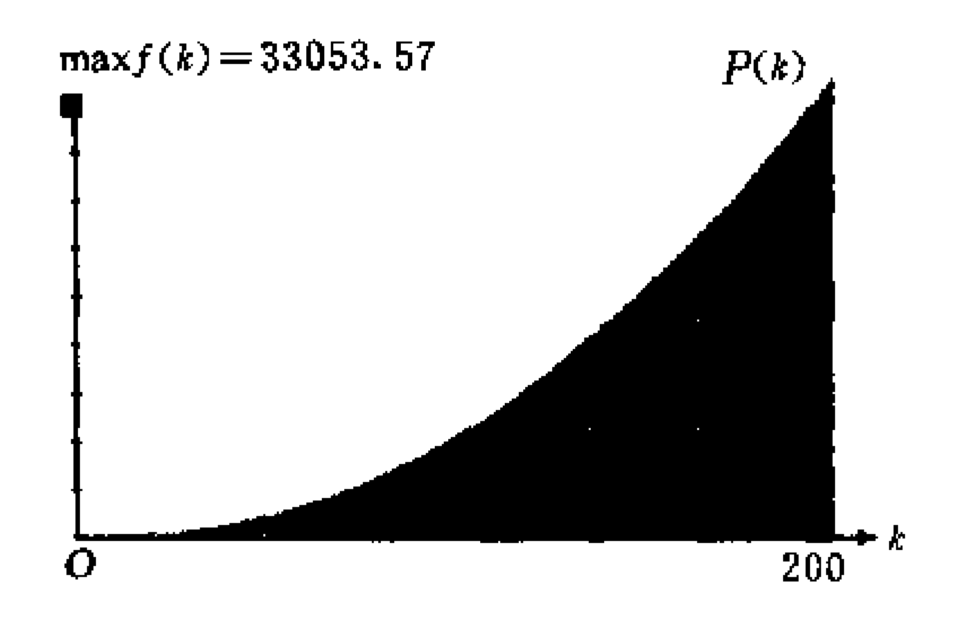



图7.3 误差方差 $P_k$ 增长趋势

而

$$P(k) \approx \frac{(k-1)^2}{4}(\alpha-\beta)^2. \tag{7.68}$$

以上这一例子说明当 $k \to +\infty$ 时，误差愈来愈大，以致 $P(k) \to +\infty$. 研究其原因，有二个方面：一方面是，我们对模型参数 $\alpha$ 没有把握好，即事前没能估计得准确. 如果 $\beta=\alpha$，则由 (7.68) 可以看出 $P(k)$ 就不会发散；另一原因是增益系数 $K_k$ 下降太快. 我们在上一节中已谈到 $K_k$ 所起的作用是调节误差. 如果 $K(k) \to 0$，则到后来在 (7.66) 式中第二项几乎不起作用，对于前一项的误差不能作"及时的修正"，从而误差愈积愈大. 因此，在工程应用中，也有人建议：$K_k$ 当 $k$ 适当大之后取为定值，如

$$K(k) = \begin{cases} K(k-1), & 0 < k < M, \\ \dfrac{1}{N_0}, & M \leqslant k, \end{cases} \tag{7.69}$$

$N_0$ 为适当大的整数.

例如，以上题为例，假定我们对 $\alpha$ 仍没估准，仍取 $\beta=1$，$\alpha-\beta=2$，所有的公式均不变，仅是 (7.66) 代之以 ($N_0=20$).

$$\hat{X}_k = (X_{k-1} + \beta) + K(k)(Y_k - (\hat{X}_{k-1} + \beta)) \quad (7.70)$$

其中 $K(k)$ 用 (7.69) 定义，则 $P(k)$ 误差方差值虽然不是零，但和以上算出的结果表7.1相比要小很多. 事实上在 $k=1, 2, \cdots, 1024$范围内可将二者误差方差对比如下：

| $k$ | 2 | 4 | 8 | 16 | 32 | 64 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | 3.230 | 1.2885 | 0.3896 | 42.330 | 399.568 | 2436.81 |
| $P(k)$ | $2.355^2$ | $4.1827^2$ | $7.9820^2$ | $17.83^2$ | $29.04^2$ | $36.01^2$ |

| $k$ | 128 | 256 | 512 | 1024 |
|---|---|---|---|---|
| $P_k$ | 12233.29 | 55634.63 | 239285.7 | 996775.6 |
| $P(k)$ | $37.94^2$ | $38.15^2$ | $37.93^2$ | $37.95^2$ |

表7.2

其中 $P_k$ 表示用 $K_k$(见(7.64)式)计算的误差方差；$P(k)$表示用 $K(k)$(见(7.69)式)计算的误差方差. 事实上，由 $P(k)$的变化看当 $k\geqslant128$以后，其误差方差已基本上趋于一个定值，说明它不再发散，$P(k)\approx38^2$，当 $k\geqslant128$，这一结果是正确的，理论上可以证明，当 $K(k)$取为(7.69)的形式，则对充分大的 $k$，有

$$P(k) \approx (N_0 - 1)^2(\beta - \alpha)^2. \quad (7.71)$$

如上可以看出

$$(N_0 - 1)^2(\beta - \alpha)^2 = (19)^2(3 - 1)^2 = 38^2 \quad (7.72)$$

这和表7.2的结果是吻合的，(对以上分析有兴趣的读者可参看中科院数学所概率组编 (1975) 的书).

对于定常的状态方程

$$\begin{cases} X_k = FX_{k-1} + \Gamma W_k, \\ Y_k = HX_k + v_k, \end{cases} \quad (7.73)$$

其中状态的维数为 $p$，如果定常系数矩阵 $F$，$\Gamma$，$H$ 能满足以下

条件

$$\sum_{k=0}^{p-1} F^k \Gamma \Gamma'(F^k)' > 0, \tag{7.74}$$

$$\sum_{k=0}^{p-1} (F^k)' H' H F^k > 0, \tag{7.75}$$

则存在一个唯一的正定阵 $P$，使得从任意的初始方差阵 $P_0$ 出发，当 $k \to \infty$ 时，恒有

$$P_k \to P, \tag{7.76}$$

其中（7.74）和（7.75）也是所谓完全可观测性和完全可控制性的充分必要条件*.

如果以上二个条件能满足，我们就可以放心地运用 Kalman 滤波方法，从任意 $P_0$ 出发去进行递推滤波而不会使误差阵 $P_k$ 发散.

### 2.5 关于最优控制的 Kalman 滤波.

以上讨论的都是纯滤波问题，即讨论的基本方程为（7.73）形式，其中没有控制项 $u_t$. 一般的带有控制项的 Kalman 滤波的状态方程可表为

$$X_k = FX_{k-1} + Bu_{k-1} + \Gamma W_k. \tag{7.77}$$

其中 $F$，如同以前的规定一样，$\Gamma$，$B$ 也是 $p \times p$ 的矩阵，$u_t$ 是控制项，它和 $X_t$ 都是 $p \times 1$ 向量.

如果 $u_t$ 是已知给定的，则（7.77）加上量测方程

$$Y_k = HX_k + \nu_k \tag{7.78}$$

的 Kalman 滤波方法由以下递推公式给出：

$$P_0 = \mathrm{VAR}(X_0) \text{ 为初始方差阵，}$$

---

* 有兴趣的读者可参看中科院数学所概率组（1975）的书.

$$P_k = (I - K_k H)\Pi_k, \tag{7.79}$$

$$\Pi_k = F P_{k-1} F' + \Gamma Q \Gamma', \tag{7.80}$$

$$K_k = \Pi_k H' (H \Pi_k H' + R)^{-1}, \tag{7.81}$$

$$\hat{X}_k = (F\hat{X}_{k-1} + Bu_{k-1}) + K_k(Y_k - H(F\hat{X}_{k-1} + Bu_{k-1})). \tag{7.82}$$

读者可以将（7.79）—（7.82）和（7.37）—（7.40）相比较就会发现除了用

$$F\hat{X}_{k-1} + Bu_{k-1} \tag{7.83}$$

代替原来的 $F\hat{X}_{k-1}$之外，Kalman 滤波公式几乎完全一样.

以上是假定 $\{u_{k-1}\}$ 均为已知的条件下，它的 Kalman 滤波递推公式. 现在来讨论最优控制问题.

所谓对方程（7.77）和（7.78）的最优控制问题是指：在获得观测 $\{Y_k, k=1, 2, \cdots, N\}$ 我们希望寻找 $N$ 个控制变量 $u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}$使得一种综合性能指标达到最优，比如，使得二次损失

$$E\{V_N\} = E\Big(\sum_{j=1}^{N}(X_j' C_j X_j + u_{j-1}' D_{j-1} u_{j-1})\Big) \tag{7.84}$$

达最小，其 $C_j$ 是 $X_j$ 的任意给定的对称正定的加权矩阵；$D_{j-1}$是 $u_{j-1}$的对称正定加权矩阵.

为了解决这一问题，我们先来讨论非随机的最优控制问题. 设，$F$，$B$ 是 $p\times p$ 的矩阵，方程为：

$$X_k = FX_{k-1} + Bu_{k-1}. \tag{7.85}$$

我们希望选 $u_0, u_1, \cdots, u_{N-1}$使得

$$V_N = \sum_{j=1}^{N}(X_j' C_j X_j + u_{j-1}' D_{j-1} u_{j-1}) \tag{7.86}$$

达到最小.

为此，我们先来证明一个矩阵代数中的定理：

**定理7.1** 设 $A$ 是 $m\times m$ 正定对称阵，$u$，$X$ 均为 $m\times 1$的向量，$B$ 是 $m\times m$ 矩阵，则使

$$V = u'Au + 2X'Bu \tag{7.87}$$

达极小值的 $u$ 为

$$u = -A^{-1}B'X \tag{7.88}$$

此定理的证明可以用矩阵微分的方法*：设 $A$ 是对称正定阵，则

$$\frac{d}{du}(u'Au) = 2Au, \tag{7.89}$$

$$\frac{d}{du}(u'B) = \frac{d}{du}(B'u) = B. \tag{7.90}$$

利用（7.89）、（7.90）于（7.87）可得

$$\frac{dV}{du} = 2Au + 2(X'B)' = 0, \tag{7.91}$$

即

$$u = -A^{-1}B'X. \tag{7.92}$$

现在来考虑 $u_0$，$u_1$，…，$u_{N-1}$使 $V_N$ 达最小的问题．先来考虑其中最后一项

$$V_1 = X_N'C_NX_N + u_{N-1}'D_{N-1}u_{N-1} \tag{7.93}$$

对 $u_{N-1}$的最优选择问题．此时，将（7.85）代入上述（7.93）式可得

$$\begin{aligned} V_1 &= (FX_{N-1} + Bu_{N-1})'C_N(FX_{N-1} + Bu_{N-1}) \\ &\quad + u_{N-1}'D_{N-1}u_{N-1} \qquad (7.94) \\ &= (X_{N-1}'F' + u_{N-1}'B')(C_NFX_{N-1} + C_NBu_{N-1}) \\ &\quad + u'_{N-1}D_{N-1}u_{N-1} \end{aligned}$$

* 可参看 K. S. Miller（1964）.

$$= (X_{N-1}'F'C_NFX_{N-1} + u_{N-1}'B'C_NFX_{N-1} + X_{N-1}'F'C_NBu_{N-1} + u_{N-1}'B'C_NBu_{N-1}) + u_{N-1}'D_{N-1}u_{N-1}$$

$$= X_{N-1}'F'C_NFX_{N-1} + 2X_{N-1}'F'C_NBu_{N-1} + u_{N-1}'(D_{N-1} + B'C_NB)u_{N-1}. \tag{7.95}$$

从(7.95)表达式中可看出第一项不含$u_{N-1}$，故使$V_1$最小的$u_{N-1}$只需也必须使

$$V = u_{N-1}'(D_{N-1} + B'C_NB)u_{N-1} + 2X_{N-1}'(F'C_NB)u_{N-1} \tag{7.96}$$

达最小. 看（7.96）为定理7.1中的（7.87）形式，则使$V$最小的$u_{N-1}$由（7.88）知

$$u_{N-1}^* = -(D_{N-1} + B'C_NB)^{-1}(B'C_NF)X_{N-1} \tag{7.97}$$

而最优的（最小的）$V_1$是

$$V_1^* = X_{N-1}'F'C_NFX_{N-1} + 2X_{N-1}'F'C_NBu_{N-1}^* + (u_{N-1}^*)'(D_{N-1} + B'C_NB)u_{N-1}^*. \tag{7.98}$$

记
$$\Lambda_N = (D_{N-1} + B'C_NB)^{-1}B'C_N. \tag{7.99}$$

利用$C_N$，$D_{N-1}$对称正定阵的性质，(7.98) 中的$u_{N-1}^*$用

$$u_{N-1}^* = -\Lambda_NFX_{N-1} \tag{7.100}$$

代入并加以整理

$$V_1^* = X_{N-1}'F'C_NFX_{N-1} - 2X_{N-1}'F'C_NB\Lambda_NFX_{N-1} + X_{N-1}'F'\Lambda_N'B'C_NFX_{N-1} \tag{7.101}$$

$$= X_{N-1}'F'(C_N - 2C_NB\Lambda_N + \Lambda_N'B'C_N)FX_{N-1} \tag{7.102}$$

然而 $C_NB\Lambda_N = C_NB(D_{N-1} + B'C_NB)^{-1}B'C_N.$

利用 $C_N$，$D_{N-1}$对称正定阵性质，可得

$$(C_NB\Lambda_N) = (C_NB\Lambda_N)' = \Lambda_N'B'C_N. \tag{7.103}$$

简化（7.102）为

$$V_1^* = X_{N-1}'F'(C_N - C_NB\Lambda_N)FX_{N-1},$$

或
$$V_1^* = X_{N-1}'F'C_N(I - B\Lambda_N)FX_{N-1}. \tag{7.104}$$

令
$$\Pi_N = C_N(I - B\Lambda_N), \tag{7.105}$$

则
$$V_1^* = X_{N-1}'F'\Pi_NFX_{N-1}. \tag{7.106}$$

当 $u_{N-1}^*$ 选择之后，我们选 $u_{N-2}$ 使

$$V_2 = \sum_{j=N-1}^{N}(X_j'C_jX_j + u_{j-1}'D_{j-1}u_{j-1}) \tag{7.107}$$

达极小，其中 $C_{N-1}$，$D_{N-2}$ 是二个给定的对称正定加权矩阵. 此时，可将 $V_2$ 改写为

$$V_2 = X_{N-1}'C_{N-1}X_{N-1} + u_{N-2}'D_{N-2}u_{N-2} + V_1. \tag{7.108}$$

将 $V_1^*$ 的（7.106）代入，可得

$$V_2 = X_{N-1}'C_{N-1}X_{N-1} + X_{N-1}'F'\Pi_NFX_{N-1} + u_{N-2}'D_{N-2}u_{N-2}$$
$$= X_{N-1}'(C_{N-1} + F'\Pi_NF)X_{N-1} + u_{N-2}'D_{N-2}u_{N-2}. \tag{7.109}$$

令
$$G_{N-1} = C_{N-1} + F'\Pi_NF, \tag{7.110}$$

则可表

$$V_2 = X_{N-1}'G_{N-1}X_{N-1} + u_{N-2}'D_{N-2}u_{N-2}. \tag{7.111}$$

和（7.93）相比可看出形式完全一样，只是（7.111）中的 $G_{N-1}$ 代替了（7.93）中的 $C_N$，而由 $C_{N-1}>0$ 知 $G_{N-1}$ 也是正定对称阵，因为由 $\Pi_N$ 的（7.105）性质它是对称并使（7.106）达最小，而 $V_1^*\geqslant 0$ 的.

利用前面的结果不难看出使 $V_2$ 达最优的 $u_{N-2}$ 应当选择为（参看（7.97）式）

$$u_{N-2}^* = -(D_{N-2} + B'G_{N-1}B)^{-1}(B'G_{N-1}F)X_{N-2}. \tag{7.112}$$

令
$$\Lambda_{N-1} = (D_{N-2} + B'G_{N-1}B)^{-1}(B'G_{N-1}), \tag{7.113}$$

$$\Pi_{N-1} = G_{N-1}(I - B\Lambda_{N-1}), \tag{7.114}$$

则使 $V_2$ 达极小值的是

$$V_2^* = X_{N-2}' F' \Pi_{N-1} F X_{N-2}. \tag{7.115}$$

读者不难看出，以上的方法可以不断推延下去. 一般地，对 $k=0, 1, 2, \cdots, N-1$，其最优控制变量为

$$u_{N-k-1}^* = -\Lambda_{N-k} F X_{N-k-1}. \tag{7.116}$$

其中

$$\Lambda_{N-k} = (D_{N-k-1} + B' G_{N-k} B)^{-1}(B' G_{N-k}), \tag{7.117}$$

$$G_{N-k} = C_{N-k} + F' \Pi_{N-k+1} F, \tag{7.118}$$

$$\Pi_{N-k+1} = G_{N-k+1}(I - B\Lambda_{N-k+1}). \tag{7.119}$$

约定 $G_N = C_N$. 并由（7.115）式可看出，对（7.86）达极小值的 $V_N$ 只能是

$$V_N^* = X_0' F' \Pi_1 F X_0 \tag{7.120}$$

这样，将（7.116）的诸最佳 $\{u_{N-k+1}^*, k=0, 1, 2, \cdots, N-1\}$ 代入最原始的方程（7.85）则可得如下的结果：

$$X_{N-k} = F X_{N-k-1} + B(-\Lambda_{N-k} F X_{N-k-1}),$$

或 $$X_{N-k} = (I - B\Lambda_{N-k}) F X_{N-k-1}, \quad k = 0,1,2,\cdots,N-1. \tag{7.121}$$

这样，我们可以归纳出以下的定理：

**定理7.2** 设模型方程为

$$X_k = F X_{k-1} + B u_{k-1}$$

其中 $F$, $B$ 为 $p \times p$ 的矩阵，$X_k$, $u_{k-1}$ 为 $p \times 1$ 的向量，求一系列最优控制变量 $u_0^*$, $u_1^*$, $\cdots$, $u_{N-1}^*$ 使得对给定的 $\{C_j, j=1, 2, \cdots, N\}$ 及 $\{D_{j-1}, j=1, 2, \cdots, N\}$ 对称正定矩阵加权系数所组成的

$$V_N = \sum_{j=1}^{N} (X_j' C_j X_j + u_{j-1}' D_{j-1} u_{j-1})$$

达最小，则 $\{u_{N-k-1}^*,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ N-1\}$ 是由（7.116）～（7.119）所确定的，此时 $V_N^*$ 最小值由（7.120）表示.

这样，对观测到的 $X_0$，$X_1$，…，$X_{N-1}$，相应地可以确定最优控制变量 $u_0^*$，$u_1^*$，…，$u_{N-1}^*$，并由此，由（7.121）可推出 $X_N$ 的值，而整体看，它们使 $V_N$ 达到最小.

以下我们来看带有随机项的最优控制问题. 此时，假定状态方程为

$$\begin{cases} X_k = FX_{k-1} + Bu_{k-1} + \Gamma W_k, \\ Y_k = HX_k + v_k. \end{cases} \tag{7.122}$$

而且给定一串对称正定的加权系数矩阵 $\{C_j,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$ 及 $\{D_{j-1},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ N\}$，希望求一串最优控制变量 $u_0^*$，$u_1^*$，…，$u_{N-1}^*$（它们是观测 $\{Y_k\}$ 的函数），使得如下指标

$$E[V_N] = \sum_{j=0}^{N} E[X_j' C_j X_j + u_{j-1}' D_{j-1} u_{j-1}] \tag{7.123}$$

达最小值.

其结果如下（证明此处略去）：最优的控制变量是

$$u_{N-k-1}^* = -\Lambda_{N-k} F \hat{X}_{N-k-1}. \tag{7.124}$$

其中 $\Lambda_{N-k}$ 由（7.117）—（7.119）所定义，而 $\hat{X}_{N-k-1}$ 是基于观测 $\{Y_k\}$ 对 $X_{N-k-1}$ 的最佳线性估计，在本章第五节中已介绍了（7.77），（7.78）状态方程下的 Kalman 滤波，它由（7.79）—（7.82）组成递推公式，其中的 $u_{k-1}$ 应该用 $u_{k-1}^*$ 代替之.

# § 3　状态方程的 AR 建模法

3.1　问题的提出.

在以上介绍的 Kalman 最优滤波与控制方法中可以看出，它们的根本出发点是一对状态方程，即模型方程与量测方程. 在许多实际科学研究或工程问题中，量测方程

$$\boldsymbol{Y}_t = \boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_t + \boldsymbol{v}_t \tag{7.125}$$

比较容易从实际问题的背景中加以确定，如在通信中有

$$y_t = \sum_0^p h_k x_{t-k} + v_t \tag{7.126}$$

的方程，$\{x_t, x_{t-1}, \cdots\}$，$\nu_t$，$y_t$ 均为一维序列，$x_t$ 相当于信号序列，$\nu_t$ 是观测中叠加的加性噪声（如 Gauss 白噪声)，而 $\{h_0, h_1, \cdots, h_p\}$ 相当于信号在空间传播过程中的衰减系数，而 (7.126) 就是一个很好的"多径模型". 然而如何才能获得模型方程

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}_t \tag{7.127}$$

呢?在许多工程问题中，如飞行器、人造地球卫星等的控制问题中，这些控制对象的运动规道往往有一定的方程来描述，如遵从力学的运动的微分方程等. 如果用离散时间来表示则往往可用差分方程来近似描述，这就可以导致获得类似 (7.127) 的模型方程.

但是，也有大量的问题它原本并无类似上而所说的运动方程，例如电话通信等问题. 因此，我们无法直接表示出它的模型方程. 于是人们问：如果对一个观察对象 $\boldsymbol{X}_t$，我们能够获得

它的大量样本 $X_1, X_2, \cdots, X_N$，是否可以尽可能准确地获得它的模型方程呢？由于这一问题比较难，所以许多数学工作者和工程理论家认为这可能是 Kalman 滤波在许多领域不好推广的原因之一.

事实上，应该提醒注意的是：如果一个多维序列 $X_t$ 如果它满足（7.127）的方程，如果对矩阵 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{W}_t$ 给予适当的，不太严的限制，则数学上可以证明 $\boldsymbol{X}_t$ 将是一个马尔科夫序列. 这种序列有一特点，即 $X_{t_0}$ 的未来，比如 $\boldsymbol{X}_{t_0+\tau}$ $(\tau>0)$ 它只依赖于 $\boldsymbol{X}_t$ 的当前值 $\boldsymbol{X}_{t_0}$，而与它的"历史"状况，如 $\{X_{t_0-k},\ k>0\}$ 无关！许多自然界的现象确实具有这种性质，例如：研究生态中某一种昆虫在 $t$ 年里的成虫数. 显然未来成虫数的多少只决定于今年的数量而与历史上有多少数量无关. 然而这种马尔科夫性质显然是很强的一种要求. 更多的是：未来 $t_0+\tau$ 时刻 $\boldsymbol{X}_{t_0+\tau}$ 的值不仅决定于当前 $\boldsymbol{X}_{t_0}$，而且与历史上一段经历有关. 因此，理论上讲并不是任意的观察或研究对象都具有马氏性，都能用（7.127）来描述的.

### 3.2　多维 AR(1) 序列.

设 $\boldsymbol{X}_t=(X_1(t),\cdots,X_p(t))'$ 是 $p$ 维的随机变量序列，$E[X_k(t)]^2<+\infty, k=1,2,\cdots,p$，若对任意整数 $t,\tau$ 均有

$$EX_k(t)\equiv a_k,\ k=1,2,\cdots,p, \tag{7.128}$$

$$EX_k(t+\tau)X_l(t)=B_{kl}(\tau),\text{一切 } t,\tau \text{ 和 } k,\ l=1,2,\cdots,p, \tag{7.129}$$

则称 $\boldsymbol{X}_t$ 是 $p$ 维平稳列，$x_k(t)$ 和 $x_l(t)$ 被称为是平稳相关的.

同以前一样，我们也假定 $EX_k(t)\equiv 0, k=1,2,\cdots,n$. 以后我们称

$$\boldsymbol{R}(\tau)=(B_{kl}(\tau))_{1\leqslant k,l\leqslant p},\ \tau=0,\pm 1,\pm 2,\cdots, \tag{7.130}$$

为 $\boldsymbol{X}_t$ 的相关矩阵或协方差阵.读者不难看出相关函数 $\boldsymbol{R}(\tau)$具有以下性质：

$$\boldsymbol{R}(0) \geqslant 0, \tag{7.131}$$

$$\boldsymbol{R}'(t_1 - t_2) = \boldsymbol{R}(t_2 - t_1) \tag{7.132}$$

假设 $p$ 维平稳序列 $\boldsymbol{X}_t$ 满足以下的随机差分方程

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t \tag{7.133}$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 是 $p\times p$ 的实方阵，并且

$$\det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}z) = P(z) \tag{7.134}$$

的根皆在单位圆外，并且 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$（$p\times 1$维向量）满足

$$E\boldsymbol{\varepsilon}_t\boldsymbol{\varepsilon}_s' = \boldsymbol{D}_0\delta_{t,s} \tag{7.135}$$

其中 $\det(\boldsymbol{D}_0) \neq 0$,则称 $\boldsymbol{X}_t$ 为 **AR**(1) 模型.

例如：设 $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t))'$ 是标准白噪声序列,$\boldsymbol{D}_0 = \boldsymbol{I}_{2\times 2}$(二阶单位阵),$\boldsymbol{X}_t$ 满足以下的方程

$$\boldsymbol{X}_t = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \tag{7.136}$$

其中

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P}(z) &= \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}z) \\ &= \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{3}z & -\frac{1}{2}z \\ -\frac{1}{2}z & 1 - \frac{1}{3}z \end{vmatrix} \\ &= \left(1 - \frac{1}{3}z\right)^2 - \frac{1}{4}z^2 \\ &= 1 - \frac{2}{3}z - \frac{5}{36}z^2 \\ &= -\frac{1}{36}(5z - 6)(z + 6) \end{aligned} \tag{7.137}$$

有二个根 $z_1=\frac{6}{5}$，$z_2=-6$，皆在单位圆外，

可见(7.136)满足 **AR**(1)模型的条件，$X_t$ 是一个 **AR**(1)模型，它具有马尔可夫性质.

又如，Grenander 和 Rosenblatt 讨论过他们的经济模型：设 $X_1(t)$ 表 $t$ 时刻某商品的价格，用 $X_2(t)$ 表 $t$ 时刻的供给量，则 $(X_1(t),X_2(t))=X_t$ 遵从以下的模型

$$\begin{cases}x_1(t)=-bx_2(t)+\eta_1(t),\\ x_2(t)=ax_1(t-1)+\eta_2(t),\ a,b>0.\end{cases}\tag{7.138}$$

$\eta_1(t),\eta_2(t)$ 为标准白噪声.

(7.138)描述了供求关系. 当上一时刻价格 $x_1(t-1)$ 高，则下一时刻供应量 $x_2(t)$ 也增多；而一旦供应量多了，则由第一个方程看价格反倒会降下来. 显然，可以将(7.138)写成

$$\begin{pmatrix}1 & b\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t-1)\\ x_2(t-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\eta_1(t)\\ \eta_2(t)\end{pmatrix}\tag{7.139}$$

或 $$\begin{pmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-ab & 0\\ a & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1(t-1)\\ x_2(t-1)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_1(t)\\ \varepsilon_2(t)\end{pmatrix}\tag{7.140}$$

其中 $$\begin{cases}\varepsilon_1(t)=\eta_1(t)-b\eta_2(t),\\ \varepsilon_2(t)=\eta_1(t)\end{cases}.\tag{7.141}$$

而 $$\begin{aligned}P(z)&=\det\left(I-\begin{pmatrix}-ab & 0\\ a & 0\end{pmatrix}z\right)\\ &=\begin{vmatrix}1+abz & 0\\ -az & 1\end{vmatrix}=1+abz\end{aligned}\tag{7.142}$$

的根是 $z=-\frac{1}{ab}$，$a$，$b>0$， (7.143)

则要 $|z| > 1$ 当且仅当 $ab < 1$. (7.144)

而 $$D_0 = E\begin{bmatrix}\varepsilon_1(t)\\ \varepsilon_2(t)\end{bmatrix}(\varepsilon_1(t)\ \varepsilon_2(t)) = \begin{pmatrix}1+b^2 & -b\\ -b & 1\end{pmatrix}$$ (7.145)

显见 $D_0$是对称正定阵. 可见 Grenander—Rosenblatt 经济模型 $\boldsymbol{X}_t = (X_1(t), X_2(t))$ 满足(7.140) 的 AR(1) 模型，其中

$$F = \begin{pmatrix}-ab & 0\\ a & 0\end{pmatrix}$$ (7.146)

**定理 7.3** 设 $\boldsymbol{X}_t$ 为 $p$ 维 AR(1) 模型

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t.$$ (7.147)

其中 det $(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}z)$ 的根皆在单位圆外，$\boldsymbol{R}(m)$ 是 $\boldsymbol{X}_t$ 的协方差阵，则有以下的方程成立

$$\boldsymbol{R}(1) - \boldsymbol{F}\boldsymbol{R}(0) = 0.$$ (7.148)

**证明** 利用(7.147)，右端的 $\boldsymbol{X}_{t-1}$可用 $\boldsymbol{F}X_{t-2}+\varepsilon_{t-1}$代之，而这里的 $\boldsymbol{X}_{t-2}$又可用 $\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-3}+\boldsymbol{\varepsilon}_{t-2}$代之，等等，这样下去，可有

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \boldsymbol{F}^k \boldsymbol{\varepsilon}_{t-k}$$ (7.149)

的表达式.

于是对 (7.147)，

$$E(\boldsymbol{X}_{t+1} \cdot \boldsymbol{X}_t') = \boldsymbol{F}E(\boldsymbol{X}_t \cdot \boldsymbol{X}_t') + E(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}\boldsymbol{X}_t'),$$

$$\boldsymbol{R}(1) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{R}(0) + \sum_{k=0}^{\infty}(E\boldsymbol{\varepsilon}_{t+1}\boldsymbol{\varepsilon}_{t-k}')(\boldsymbol{F}^k)'.$$ (7.150)

利用(7.135) 白噪声性质，(7.150) 可表示为

$$\boldsymbol{R}(1) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{R}(0),$$

即(7.148) 式或 $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{R}(1)\boldsymbol{R}^{-1}(0).$ (7.151)

我们以前介绍过 $\boldsymbol{R}(\tau)$中的元素 $B_{kl}(\tau)$（见本章(7.130)—

(7.129)式)可以从样本出发来求

$$\hat{B}_{kl}(\tau)=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N-\tau}x_k(s+\tau)x_l(s),k,l=1,2,\cdots,p. \tag{7.152}$$

因此，从样本 $X_1,X_2,\cdots,X_N$ 出发，矩阵 $\boldsymbol{R}(\tau)$ 可以用$(\hat{B}_{k,l}(\tau))$来近似估计．特别 $\tau=0$和1，

$$\begin{cases}\hat{B}_{k,l}(0)=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N}x_k^2(s),\ k,l=1,2,\cdots,p,\\ \hat{B}_{k,l}(1)=\frac{1}{N}\sum_{s=1}^{N-1}x_k(s+1)x_l(s),\ k,l=1,2,\cdots,p.\end{cases} \tag{7.153}$$

这样（7.151）的估计

$$\hat{\boldsymbol{F}}=\hat{\boldsymbol{R}}(1)\boldsymbol{R}^{-1}(0) \tag{7.154}$$

也可以获得，从而 $X_t$ 的模型可近似为

$$\boldsymbol{X}_{t+1}=\hat{\boldsymbol{F}}\boldsymbol{X}_t+\boldsymbol{\varepsilon}_t. \tag{7.155}$$

其中 $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ 的方差阵 $\boldsymbol{D}_0$可以证明（见谢衷洁（1990）书）为

$$\boldsymbol{D}_0=\boldsymbol{R}(0)-\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}'(1)=\boldsymbol{R}(0)-\boldsymbol{F}\boldsymbol{R}(0)\boldsymbol{F}'. \tag{7.156}$$

如用样本估计之，则可表为

$$\hat{\boldsymbol{D}}_0=\hat{\boldsymbol{R}}(0)-\hat{\boldsymbol{F}}\hat{\boldsymbol{R}}(0)\hat{\boldsymbol{F}}'. \tag{7.157}$$

请读者注意，我们以上对观测对象 $\boldsymbol{X}_t$ 能够给它一个模型方程（7.155）的描述，其前提是：我们假定它具有前面说的马尔科夫性质——即“$\boldsymbol{X}_t$ 的未来只决定于现在而与历史无关”．如果不具备这一性质，上述用 AR(1)来描述效果就不一定会好.

另一种可能的途径是对一维的 $x(t)$，先利用第六章中讲述的方法（参看定理6.7及有关判阶的内容），从 $x(t)$的样本 $x_1$，$x_2,\cdots,x_N$ 出发先求样本相关函数(6.129)得 $\gamma_0,\gamma_1,\cdots,\gamma_{m_N}$，并解 Yule-Walker 方程得$\{\theta_0(s),\varphi_1^{(s)},\cdots,\varphi_s^{(s)},s=1,2,\cdots,m_N\}$，$m_N$

$=O(\sqrt{N})$，然后用 $AIC(s)$ 或 $BIC(s)$ 判阶可得拟合的阶数 $p$，从而使 $x(t)$ 有一个一维的 AR($p$)模型

$$x(t)+\varphi_1 x(t-1)+\cdots+\varphi_p x(t-p)=\theta_0\varepsilon(t). \tag{7.158}$$

其中 $\varphi_k=\varphi_k^{(p)},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ p;\ \theta_0=\theta_0(p).$ (7.159)

由（7.158）出发我们可以构造一个准状态方程如下：

首先将（7.158）改写成

$$x_k=-\sum_{l=1}^{p}\varphi_l x_{k-l}+W_k. \tag{7.160}$$

其中 $W_k=\theta_0\varepsilon(k)$，也是独立同分布的白噪声，则可列出以下方程

$$\begin{bmatrix} x_{k-p+1} \\ x_{k-p+2} \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ & 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\varphi_p & -\varphi_{p-1} & \cdots & -\varphi_2 & -\varphi_1 \end{bmatrix} \cdot\begin{bmatrix} x_{k-p} \\ x_{k-p+1} \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}W_k \tag{7.161}$$

即可将（7.161）表成

$$\boldsymbol{X}_k=\boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{k-1}+\boldsymbol{\Gamma}W_k. \tag{7.162}$$

其中 $\boldsymbol{X}_k=(x_{k-p+1},\ x_{k-p+2},\ \cdots,\ x_k)'$ 是 $p\times1$ 维向量，$\boldsymbol{\Gamma}=(0,\ 0,\ \cdots,\ 1)'$ 也是 $p\times1$ 维向量，$W_k$ 是 $1\times1$ 的序列，

$$
F = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & 0 & \\ & 0 & 1 & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & & 1 \\ -\varphi_p & -\varphi_{p-1} & \cdots & -\varphi_2 & -\varphi_1 \end{bmatrix} \tag{7.163}
$$

称为 $X_k$ 的转移矩阵.

最后，我们还要证明，这样建立的模型方程（7.162）的 $F$ 确实满足（7.134）的条件，即特征多项式 $\det(I-Fz)=P(z)$ 的根皆在单位圆外.

为此，我们先看一个3阶的，此时（7.163）对应的特征多项式

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \det(I - Fz) \\
&= \left| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & z & 0 \\ & 0 & z \\ -\varphi_2 z & -\varphi_2 z & -\varphi_1 z \end{pmatrix} \right| \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -z & 0 \\ 0 & 1 & -z \\ \varphi_1 z & \varphi_1 z & 1+\varphi_1 z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -z \\ \varphi_2 z & 1+\varphi_1 z \end{vmatrix} + (-1)^{3-1}(\varphi_1 z) \begin{vmatrix} -z & 0 \\ 1 & -z \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} 1 & -z \\ \varphi_2 z & 1+\varphi_1 z \end{vmatrix} + (-1)^{3-1}(\varphi_2 z)(-z)^2 \\
&= 1 + \varphi_2 z + (-1)^{3-2}(\varphi_2 z)(-z) \\
&\quad + (-1)^2(\varphi_2 z^3) \\
&= 1 + \varphi_1 z + \varphi_2 z^2 + \varphi_2 z^3.
\end{aligned} \tag{7.164}
$$

然而对3阶 **AR**（3）的系数（$\varphi_2$，$\varphi_2$，$\varphi_3$），我们在定义（1.117）

（注意那里的 $\varphi_i$ 相当于我们这里的 $-\varphi_i$）中已要求

$$\Phi(z)=1+\varphi_1 z+\varphi_2 z^2+\varphi_3 z^3$$

的根皆在单位圆外，可见3阶的特征多项式

$$\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}z)\neq 0,|z|\leqslant 1$$

用以上类似的方法可以证明

$$P(z)=\det(\boldsymbol{I}-\boldsymbol{F}z)$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -z & & & \\ & 1 & -z & 0 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -z \\ \varphi_p z & \varphi_{p-1} z & \cdots & \varphi_2 z & 1+\varphi_1 z \end{vmatrix}_{p\times p} \tag{7.165}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & -z & & & \\ & 1 & -z & 0 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & 1 & -z & \\ \varphi_{p-1} z & \varphi_{p-2} z & \cdots & \varphi_2 z & 1+\varphi_1 z \end{vmatrix}_{(p-1)(p-1)}$$

$$+(-1)^{p-1}(\varphi_p z)$$

$$\times\begin{vmatrix} -z & & & \\ 1 & -z & 0 & \\ & \ddots & \ddots & \\ 0 & & 1 & -z \end{vmatrix}_{(p-1)(p-1)}$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & -z & & & \\ & 1 & -z & 0 & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -z \\ \varphi_{p-1}z & \varphi_{p-2}z & \cdots & \varphi_2 z & 1+\varphi_1 z \end{vmatrix}_{(p-1)(p-1)}
$$

$$
+ (-1)^{2(p-1)}(\varphi_p z)(z)^{p-1} \qquad (7.166)
$$

而（7.166）右端为$+\varphi_p z^p$，而（7.166）第一项和（7.165）的形式一样，因而可得

$$
P(z) = \det(\boldsymbol{I} - \boldsymbol{F}z)
$$

$$
= \begin{vmatrix} 1 & -z & & & \\ & & & & 0 \\ & 1 & -z & & \\ 0 & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & -z \\ \varphi_{p-2}z & \cdots & \varphi_2 z & & 1+\varphi_1 z \end{vmatrix}_{(p-2)(p-2)}
$$

$$
+ \varphi_{p-1}z^{p-1} + \varphi_p z^p
$$

$$
= (1+\varphi_1 z) + \varphi_2 z^2 + \cdots + \varphi_{p-1}z^{p-1} + \varphi_p z^p. \qquad (7.167)
$$

显然，它是AR($p$)的(7.158)的$\Phi(z)$，由AR($p$)要求的条件，$\Phi(z)=P(z)\neq 0, |z|\leqslant 1$. 这样就完整地证明了(7.162)确实是一个$p$维的AR($p$)模型，因为令$\varepsilon_k = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}_k$，其白噪声性质自然保持.

以上这一方法是由一维序列$x(t)$出发，利用它的样本$x_1$，$x_2$，…，$x_N$构造出了一个$p$维的AR(1)多维模型方程. 如果再

加上适当的量测方程就可以进行 Kalman 滤波，而每次得到的估计 $X_{t+\tau}$的最后一个分量，由（7.161）知就是 $x_{(t+\tau)}$要求的最优估计值. 当我们的目的是对某一个一维过程作滤波或估计时，以上方法都是有效的.

## §4 Kalman 滤波在对流层散射通信中的应用

散射通信是利用空间对流层散射传播的物理特性，即利用发收天线波束交叉范围内大气的不均匀性引起的散射现象来实现通信. 它的最大优点是不必架设通信线路，而且通信跨距很长，一跳可达数百公里之远，因此在军事上特别受到重视. 但是由于接收信号是由收发天线波束交叉的那部分公共体积内的电波经多次反射而形成的许多分量之和. 各分量由于经历的路程长短不同，使到达接收点的时间有差异，形成不同的传输延迟（参看图7.4），并且由于大气不均匀的随机性就使得每个分量都带随机性.

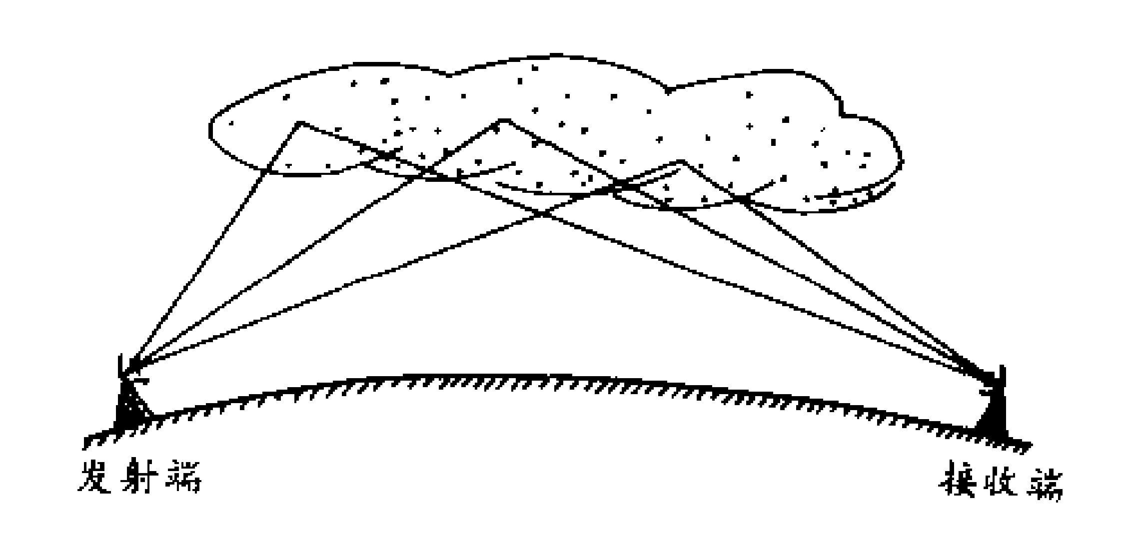



图7.4　散射通信示意图

假设发射的序列（信号）为 $x_t$，$t=0$，$\pm1$，$\pm2$，…，则多径传播到达接收端时，其接收信号可表为

$$y_t=\sum_{k=0}^{p-1}h_k x_{t-k}+\nu_t. \tag{7.168}$$

其中 $\nu_t$ 为量测（接受）过程中叠加进来的白噪声，$\{h_0, h_1, \cdots, h_{p-1}\}$ 是信号在空间传播过程中不同路径（时刻）的衰减系数. 我们的任务就是要从 $\{y_t\}$ 的观测值出发来恢复原来的信号 $\{x_t\}$的序列，$\{h_k\}_0^{p-1}$在许多场合是事先已测的.

很明显，要由 $\{y_t\}$ 恢复 $\{x_t\}$，只加强信号的功率是不行的，因为 $\{x_t\}$ 愈强，(7.168) 中除了 $h_0x_t$ 之外，其它多径干扰 $\{\sum_{k=1}^{p-1}h_k x_{t-k}\}$ 也随之加强. 因此，在通信工程历史上曾有人认为这种现象引起的误码率是不可压缩的（不能减少的）. 随后通信工程师就想出各种"均衡"方法来克服信号间或码间的干扰.

本文的思路是：先对 $x_t$ 信号作极大熵准则下的建模，得到**AR**($m$)模型后再用§3中介绍的扩张方法将 $x_t$ 变成 $m$ 维的**AR**(1)，得到模型方程，随后用(7.168)成为一对状态方程. 再用§2中介绍的 Kalman 滤波公式，逐步递推出(恢复)$x_t$ 信号序列，其中量测方程用

$$\boldsymbol{Y}_t=\boldsymbol{H}\boldsymbol{X}_t+\boldsymbol{v}_t \tag{7.169}$$

$\boldsymbol{Y}_t=\boldsymbol{y}_t$ 是一维的，$\boldsymbol{v}_t$ 也是一维序列（白噪声），

$$\boldsymbol{H}=(h_{p-1}, h_{p-2}, \cdots, h_1, h_0) \tag{7.170}$$

是$1\times p$ 的矩阵，则

$$y_t=(h_{p-1}, h_{p-2}, \cdots, h_1, h_0)\begin{pmatrix}x_{t-p+1}\\ x_{t-p+2}\\ \vdots\\ x_t\end{pmatrix}+\nu_t \tag{7.171}$$

即为 (7.169) 的量测方程.

具体说来，假定由一系列的实验我们得到了信号的样本 $x_1$，$x_2$，…，$x_N$，并由此确定了它的拟合 **AR**($p$) 模型为

$$x_t = \sum_{k=1}^{p}\varphi_k x_{t-k} + \theta_0\varepsilon_t,\ p = 6. \tag{7.172}$$

其中 $\varphi_1=-0.617$，$\varphi_2=-0.478$，$\varphi_3=0.139$，$\varphi_4=0.108$，$\varphi_5=0.059$，$\varphi_6=-0.034$；$\theta_0$是适当的参数，$\varepsilon_t$ 是 iid$N(0,1)$ 标准白噪声序列，量测方程（7.171）的 $H$ 向量，由我国某电波传播研究所在华北某地实地量测得以下数据：

| $k$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $h_k$ | −0.68 | 0.86 | −0.07 | −0.03 | −0.02 | −0.01 | 0.00 |

表7.3

首先，我们产生一批独立同分布的 $N(0,1)$标准白噪声序列 $\varepsilon(t)$，再利用以上列举的参数 $\{1, \varphi_1, \cdots, \varphi_p\}$ 和适当参数可以产生任意长的（7.172）的 $x(t)$ 序列. 图7.5就是300个这样的 **AR**（6）序列.

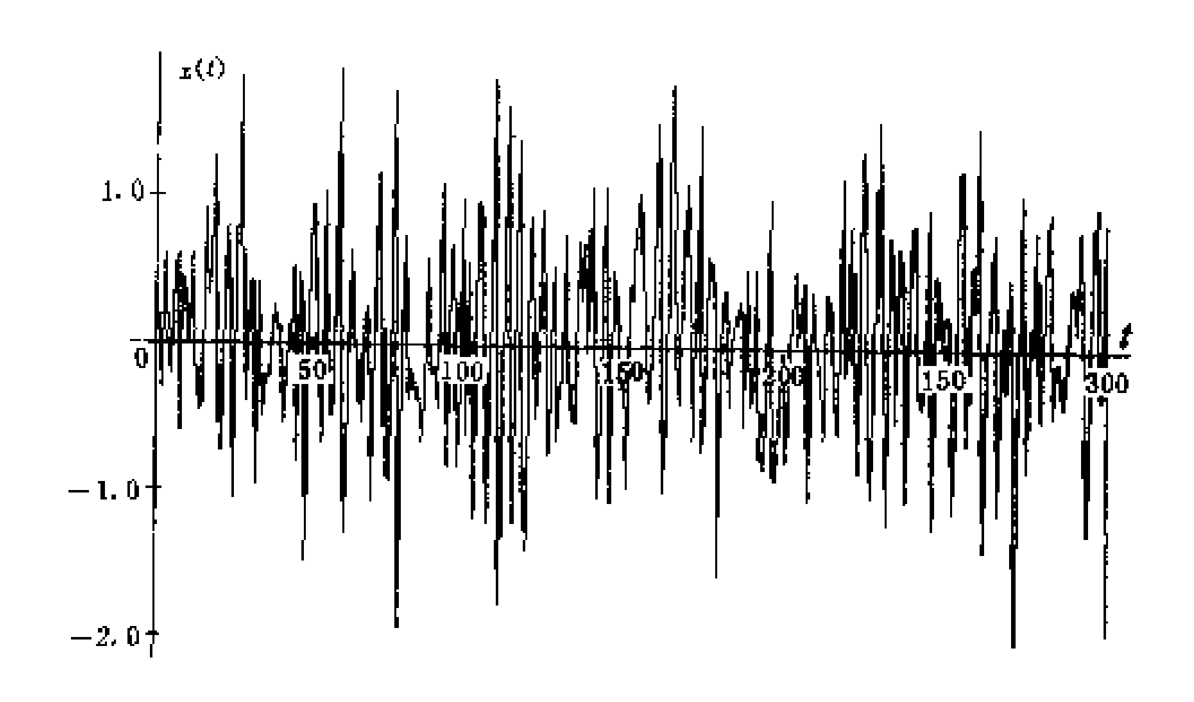



图7.5　AR(6) 的 300 个样本序列

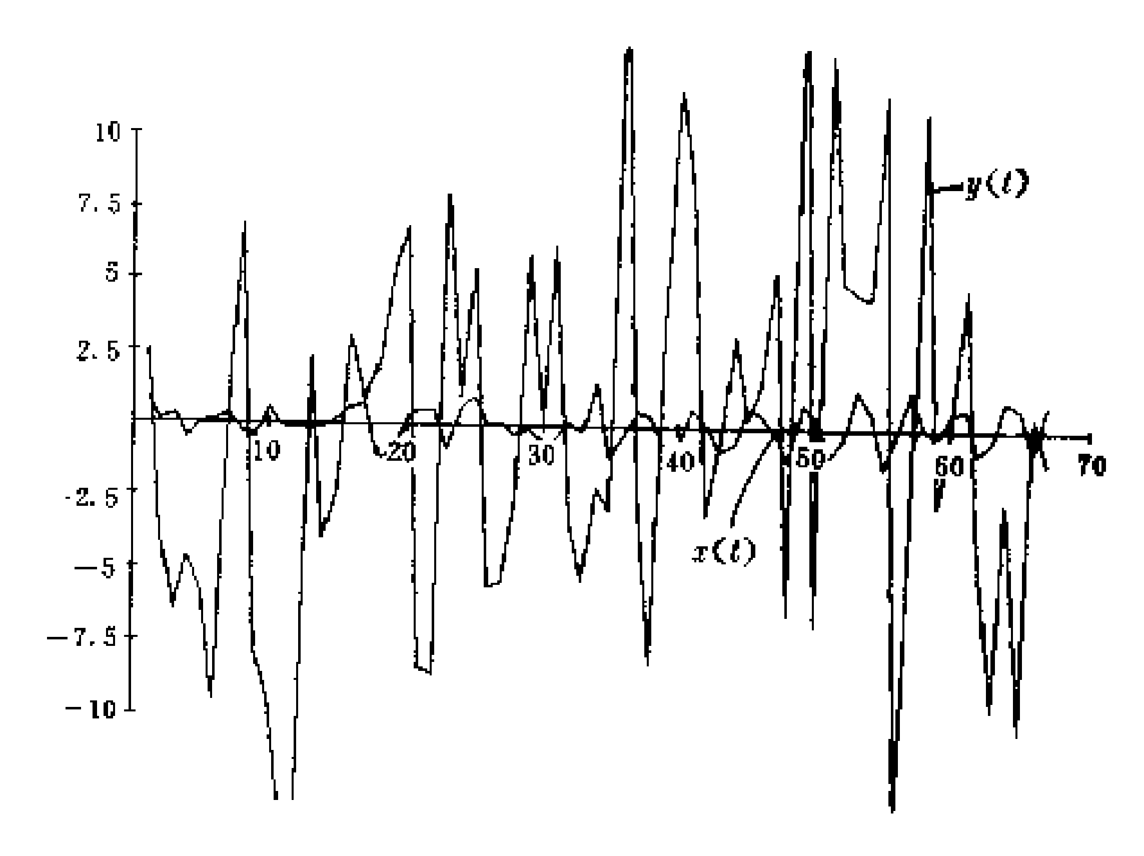



图7.6 观测量 $y(t)$ 与原信号 $x(t)$ 图

随后再产生一批与 $\varepsilon(t)$ 相互独立的 $N(0,1)$ 白噪声序列 $\eta(t)$，$v_t=\sigma_v\cdot\eta(t)$，并利用表7.3的 $\{h(k),k=0,1,2,\cdots,5\}$ 来构造

$$y(t)=(-0.01,-0.02,-0.03,-0.07,0.86,-0.68)\cdot\begin{pmatrix}x_{t-5}\\x_{t-4}\\x_{t-3}\\x_{t-2}\\x_{t-1}\\x_t\end{pmatrix}+\sigma_v\cdot\eta(t). \qquad (7.173)$$

具体参数取 $\sigma_v=10$，$\sigma_\varepsilon=1.0$，则 $y(t)$ 与 $x(t)$ 二者的差别由图7.6示出. 从图中可看出 $y(t)$ 与 $x(t)$ 已相去甚远，而且 $y(t)$ 中的噪声比信号 $x(t)$ 已强许多许多倍. 从样本方差估计，$y(t)$ 的方差 $\sigma_y^2$ 比 $y(t)$ 中的信号成分 $h_0x(t)$ 的方差 $\sigma_{X_0}^2$，二者比值

$$\frac{\hat{\sigma}_{X_0}^2}{\hat{\sigma}_y^2} \approx \frac{1.6}{125} \times 0.68 = 8.7 \times 10^{-3}. \qquad (7.174)$$

从幅度上看的信号只占量测量中的1/10. 所以从 $y(t)$ 已无法看出 $x(t)$ 的样子.

以下用我们介绍的前几节讲的 Kalman 滤波方法，从被严重歪曲的 $y(t)$ 中尽可能地恢复出 $x(t)$ 信号序列.

为了更方便于计算，针对我们的模型方程

$$\boldsymbol{X}_t = \boldsymbol{F}\boldsymbol{X}_{t-1} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{W}_k. \qquad (7.175)$$

其中 $\boldsymbol{F}$ 具体化为（7.163），$\boldsymbol{\Gamma}=$（0，0，…，1)′，则可以对（7.58）加以具体化（以下 $p=6$）：

$$\hat{\boldsymbol{X}}_k = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} + \boldsymbol{K}_k(\boldsymbol{Y}_k - \boldsymbol{H}\boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1}). \qquad (7.176)$$

其中

$$\boldsymbol{HF} = (h_{p-1}, h_{p-2}, \cdots, h_1, h_0)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & \ddots & 1 \\ \varphi_p & \varphi_{p-1} & \varphi_{p-2} & \cdots & \varphi_1 \end{pmatrix}$$

（注意：这里的 $\varphi_k$ 相当于（7.160）中的 $-\varphi_k$.）

$$\boldsymbol{HF} = (h_0\varphi_p, h_{p-1} + h_0\varphi_{p-1}, \cdots, h_1 + h_0\varphi_1). \qquad (7.177)$$

若引进 $\quad h_p = 0, \boldsymbol{HF} = (\boldsymbol{HF}_1, \boldsymbol{HF}_2, \cdots, \boldsymbol{HF}_p),$

$$(7.178)$$

则 $$\boldsymbol{HF}_k = h_{p+1-k} + h_0\varphi_{p+1-k}, k = 1, 2, \cdots, p. \qquad (7.179)$$

又设 $\quad \hat{\boldsymbol{X}}_k = (\hat{x}_k(1), \cdots, \hat{x}_k(p))', \qquad (7.180)$

则 $$\boldsymbol{HF}\hat{\boldsymbol{X}}_{k-1} = (\boldsymbol{HF}_1, \boldsymbol{HF}_2, \cdots, \boldsymbol{HF}_p)\begin{pmatrix} \hat{x}_{k-1}(1) \\ \hat{x}_{k-1}(2) \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-1}(p) \end{pmatrix}$$

$$= \sum_{l=1}^{p} HF_l \cdot \hat{x}_{k-1}(l) \stackrel{\wedge}{=} \hat{y}(k). \qquad (7.181)$$

它是一维的.

$$由 \quad \boldsymbol{K}_k = \Pi_k \boldsymbol{H}'(\boldsymbol{H}\Pi_k\boldsymbol{H}' + \boldsymbol{R})^{-1}. \qquad (7.182)$$

其中 $R = E\boldsymbol{v}_k\boldsymbol{v}_k' = \sigma_y^2$, (7.183)

$$\Pi_k = (\Pi_k(i,j))_{p\times p} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}' + \Gamma Q \Gamma',$$

$$\Pi_k = \boldsymbol{F}\boldsymbol{P}_{k-1}\boldsymbol{F}' + \sigma_x^2 \Gamma\Gamma'.$$

其中 $\Gamma\Gamma' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & 0 & \\ 0, & \cdots & 0, & 1 \end{pmatrix}.$

从而 $\Pi_k$ 的$(i,j)$元为

$$\Pi_k(i,j)$$

$$= \begin{cases} \sum_{s=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} F(i,s)P_{k-1}(s,l)F(j,l) + \sigma_X^2, 当 i = j = p, \\ \sum_{s=1}^{p}\sum_{l=1}^{p} F(i,s)P_{k-1}(s,l)F(j,l). 当 i,j \neq P, \end{cases}$$

(7.184)

而
$$\boldsymbol{P}_k = (\boldsymbol{I} - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H})\Pi_k$$
$$= \Pi_k - \boldsymbol{K}_k\boldsymbol{H}\Pi_k. \qquad (7.185)$$

其中

$$\boldsymbol{H}\Pi_k = (h_{p-1}, h_{p-2}, \cdots, h_1, h_0)(\Pi_k(i,j))$$
$$= \left(\sum_{i=1}^{p} h_{p-i}\Pi_k(i,j), j = 1,2,\cdots,p\right),$$

(7.186)

$$\Pi_k\boldsymbol{H}' = (\boldsymbol{H}\Pi_k')' = \left(\sum_{i=1}^{p} h_{p-i}\Pi_k(j,i), j = 1,2,\cdots,p\right)'$$
$$= \left(\sum_{l=1}^{p} \Pi_k(j,l)h_{p-l}, j = 1,2,\cdots,p\right)',$$

(7.187)

又 $\boldsymbol{H}\Pi_k H' + R = (h_{p-1}, \cdots, h_{p-i} \cdots, h_0)$

$$\times\ (\Pi_k(i,j))\begin{pmatrix} h_{p-1} \\ \vdots \\ h_{p-j} \\ \vdots \\ h_0 \end{pmatrix} + \sigma_y^2$$

$$= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p} h_{p-i}\Pi_k(i,j)h_{p-j} + \sigma_y^2. \tag{7.188}$$

它是一维的. 故由（7.182），（7.187）和（7.188）得

$$K_k = \frac{1}{H\Pi HR}\begin{pmatrix} \vdots \\ \sum_{l=1}^{p}\Pi_k(j,l)h_{p-l} \\ \vdots \end{pmatrix} \hat{=} (K_k(1),\cdots,K_k(p))', \tag{7.189}$$

它是 $p\times 1$维向量，而 $H\Pi HR$ 为（7.188）式的简记，并由此得

$$P_k = \Pi_k - \begin{pmatrix} K_k(1) \\ \vdots \\ K_k(p) \end{pmatrix}$$

$$\times \left(\sum_{l=1}^{p} h_{p-l}\Pi_k(l,1),\cdots,\sum_{l=1}^{p} h_{p-l}\Pi_k(l,p)\right),$$

即 $$P_k(i,j) = \Pi_k(i,j) - K_k(i)$$

$$\cdot \sum_{l=1}^{p} h_{p-l}\Pi_k(l,j),\ i,j = 1,2,\cdots,p. \tag{7.190}$$

再由（7.176）及（7.181）和（7.189）可得

$$
\begin{pmatrix} \hat{x}_k(1) \\ \hat{x}_k(2) \\ \vdots \\ \hat{x}_k(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ & 0 & \ddots & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & \ddots & \ddots & \\ & & & 0 & 1 \\ \varphi_p & \cdots & & \varphi_2 & \varphi_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_{k-1}(1) \\ \hat{x}_{k-1}(2) \\ \vdots \\ \hat{x}_{k-1}(p) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} K_k(1) \\ K_k(2) \\ \vdots \\ K_k(p) \end{pmatrix} (y(k) - \boldsymbol{HF}\hat{\boldsymbol{x}}_{k-1}). \tag{7.191}
$$

或者

$$
\begin{cases} \hat{x}_k(l) = \hat{x}_k(l+1) + K_k(l)(y(k) - \hat{y}(k)), \\ \qquad l = 1,2,\cdots,p-1, \\ \hat{x}_k(p) = \sum\limits_{s=1}^{p} \varphi_{p+1-s}\hat{x}_{k-1}(s) + K_k(p)(y(k) - \hat{y}(k)) \end{cases} \tag{7.192}
$$

再由（7.161）看（7.192）的最后一个分量 $\hat{x}_k$（$p$）应是 $x_k$ 序列的预测值.（7.192）中的 $\hat{y}$（$k$）是由（7.181）定义的.

由（7.190）得到的 $P_k$ 代入（7.184）中的 $\boldsymbol{P}_{k-1}$位置即可得 $\Pi_{k+1}$；再将它代入（7.186）、（7.188）、（7.189）可得 $\boldsymbol{K}_k$；将（7.192）代入（7.181）可得 $\hat{y}$（$k$+1），于是回到（7.192）可得 $\hat{x}_{k+1}$向量及 $x_{k+1}$的预测值. 再回到（7.190）可得 $\boldsymbol{P}_{k+1}$及 $\Pi_{k+2}$等等. 一开始，为了叠代可取 $\hat{x}_0$向量为0向量. 图7.7和7.8为（7.173）的滤波效果.

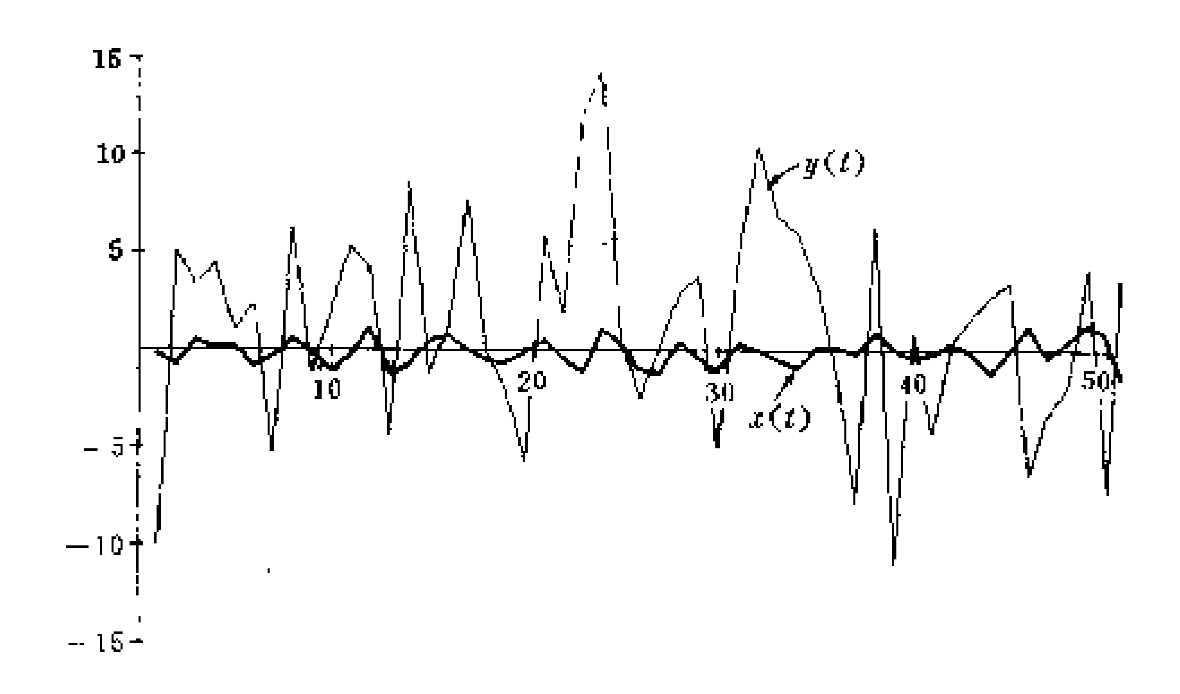



图7.7　原信号序列 $x(t)$ 与接收信号 $y(t)$ 的记录

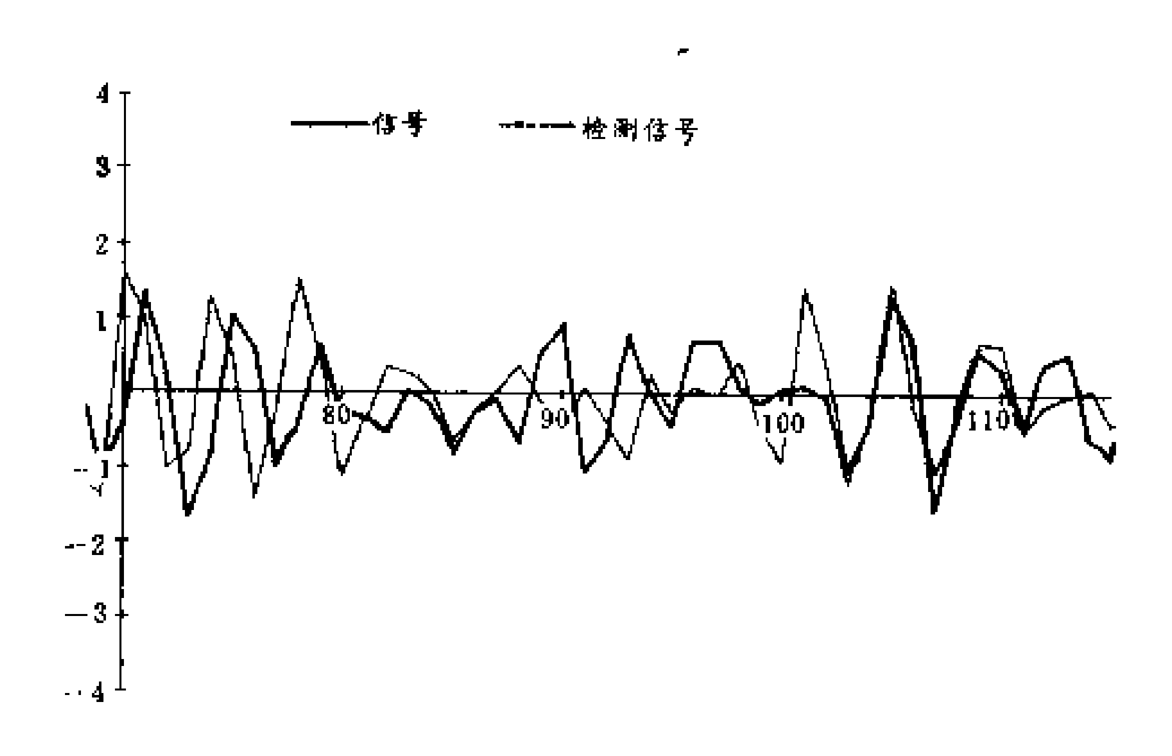



图7.8　滤波后的 $\hat{x}(k)$ 与原信号 $x(k)$

# §5 Kalman 滤波在心电图整形中的应用

以下我们再举一个 Kalman 滤波在心电图记录(ECG)中的应用，此工作见于 D. Drozen (1990)*.

在心电分析工作中首先遇到的问题是如何将 ECG 记录中的外加（混入）噪声去掉然后才能作进一步的分析工作. 图7.9是一张 ECG 混有噪声的图形，它需要加以“整形”，尽可能将噪声滤掉.

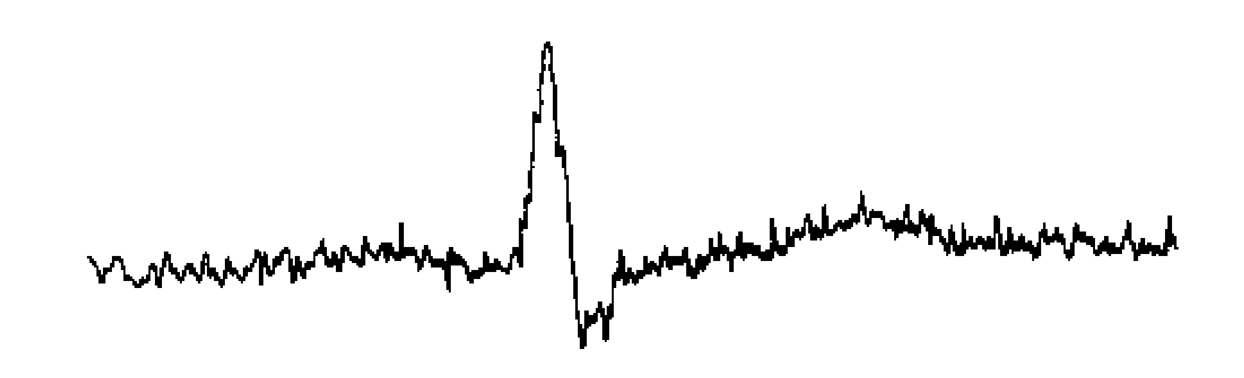


图7.9 一张混有噪声的 ECG 记录

然而许多常规的滤波实质上是对于平稳随机信号来设计的，而 ECG 却是非平稳的过程. 因此，在信号慢变化的段落，我们希望能是“低通滤波”性质、对噪声能有较强的抑制；而在靠近信号出现的快变化的段落则希望能有“高通”或“带通”滤波的功能. 显然，用第二章线性系统的观点看，定常参数的滤波是做不到以上这种带“时变功能”的滤波的. 然而，在本章第三节中已介绍，Kalman 滤波可以设计为对非平稳信号

* 以上结果选自 D. Drozen (1990). Vector ECG and Symmetrical Kalman Filtering. In: Cybernetics and Systems'90 Robert Trappl ed., 511-516, World Scientific, Singapore.

进行有效滤波的工具.

许多文献都指出 ECG 信号的状态方程可描述为

$$x_k = x_{k-1} + u_k. \tag{7.193}$$

其中 $x_k$ 表 $k$ 时刻 ECG 信号值，$u_k$ 通常称为模型噪声. 观测方程可简单表为

$$z_k = x_k + v_k. \tag{7.194}$$

$v_k$ 是 $k$ 时刻的叠加噪声，$\{z_k\}$ 序列是可以加以利用的观测值；$\{u_k\}$ 是独立同分布的正态噪声：

$$Eu_k = 0, Eu_k^2 = Q_k, Eu_k u_j = \delta_{k,j} Q_k. \tag{7.195}$$

而 $v_k$ 也是 iid 正态白噪声，与 $\{u_k\}$ 独立，并且

$$Ev_k v_j = R\delta_{k,j}. \tag{7.196}$$

于是：

$$F = 1, \Gamma = 1, H = 1.$$

$$\Pi_k = P_{k-1} + Q_k, \tag{7.197}$$

$$K_k = \frac{\Pi_k H}{H\Pi_k H' + R} = \frac{\Pi_k}{\Pi_k + R} = \frac{P_{k-1} + Q_k}{P_{k-1} + Q_k + R}, \tag{7.198}$$

$$\hat{x}_k = \hat{x}_{k-1} + K_k(z_k - \hat{x}_{k-1}) = \hat{x}_{k-1} + \frac{P_{k-1} + Q_k}{P_{k-1} + Q_k + R}(z_k - \hat{x}_{k-1}). \tag{7.199}$$

并且

$$\begin{aligned} P_k &= \Pi_k - K_k H \Pi_k \\ &= \Pi_k(1 - K_k) \\ &= (P_{k-1} + Q_k)\left(1 - \frac{P_{k-1} + Q_k}{P_{k-1} + Q_k + R}\right) \\ &= (P_{k-1} + Q_k)\frac{R}{P_{k-1} + Q_k + R}, \end{aligned}$$

$$P_k = \frac{R(P_{k-1} + Q_k)}{P_{k-1} + Q_k + R}. \tag{7.200}$$

这样，由 $P_0$ 出发，取 $\hat{x}_0 = 0$，利用(7.197)，(7.198)，(7.199)，(7.200) 即可对观测 $\{z_k\}$ 序列进行滤波.

在应用当中，存在的问题是如何去确定上述滤波公式中所需要的 $R$ 和 $Q_k$ 值. 对于 $R$，由状态方程上看它是观测过程中外加进的噪声，因此可以利用停止发射信号的办法来记录 $z_k$ 从而得到 $v_k$ 的记录，并由本书第一章中介绍的公式可求出 $R$ 的估计值. 困难的是非平稳的 $u_k$ 序列的方差 $Q_k$ 如何估计，以下介绍一种实用方法：

由公式 (7.193) — (7.194) 可知

$$\begin{cases} z_k = x_k + v_k, \\ z_{k-1} = x_{k-1} + v_{k-1}. \end{cases} \tag{7.201}$$

二者之差

$$\begin{aligned} z_k - z_{k-1} &= x_k - x_{k-1} + v_k - v_{k-1} \\ &= u_k + v_k - v_{k-1}. \end{aligned} \tag{7.202}$$

其中利用了状态方程 (7.193)，于是

$$\begin{aligned} (z_k - z_{k-1})^2 &= u_k^2 + 2u_k(v_k - v_{k-1}) + (v_k - v_{k-1})^2, \\ E(z_k - z_{k-1})^2 &= Eu_k^2 + 2Eu_k(v_k - v_{k-1}) + E(v_k - v_{k-1})^2 \\ &= Q_k + E(v_k^2 - 2v_kv_{k-1} + v_{k-1}^2) \\ &= Q_k + R + R - 2Ev_kv_{k-1}. \end{aligned} \tag{7.203}$$

利用

$$Ev_kv_{k-1} = 0. \text{(独立性)}$$

则
$$E(z_k - z_{k-1})^2 = Q_k + 2R. \tag{7.204}$$

如果在观测方程 (7.194) 中，噪声 $v_k$ 不太强，或说信噪比比较大，则 (7.204) 的主要成分应是 $Q_k$ 值，$2R$ 是不大的常数. 为了更好地实用化，我们将 (7.204) 写成算术平均的流动形式

$$\hat{Q}_k = \frac{1}{2m+1}\sum_{s=-m}^{m}(z_{k+s} - z_{k+s-1})^2 \qquad (7.205)$$

以上虽然从理论上看有些粗糙，但却是相当实用化的方法，并获得了很好的效果.

图7.10是对图7.9的记录进行 Kalman 滤波（即运用(7.205)，(7.197)—(7.200)系列公式进行运算）的结果. 从图中可以看出 Kalman 滤波对心电图的整形是相当真实的，不仅消除了噪声，而且和真实的心电图（图中的实线）相差很小（图中的虚线为 Kalman 滤波的结果），虽然滤波输出还有噪声，然而与图7.9相比已经有相当大的改善，D. Drozen 文中还与通常的常规滤波相比，效果优于后者，有趣的是作者基于 ECG 可以记录后处理（非实时处理）的情况还提出了一种"向后" Kalman 滤波，这是针对我们通常的 Kalman 滤波（称为"向前" Kalman 滤波）而言，读者可注意到通常 Kalman 滤波于 $k$ 时刻只用了 $k$ 时刻"以前"的资料. 作者建议可以再进行一次"以后"资料的 Kalman 滤波；然后将二者（"向前"与"向后"）组合成对称形的 Kalman 滤波. 事实证明其效果更佳.

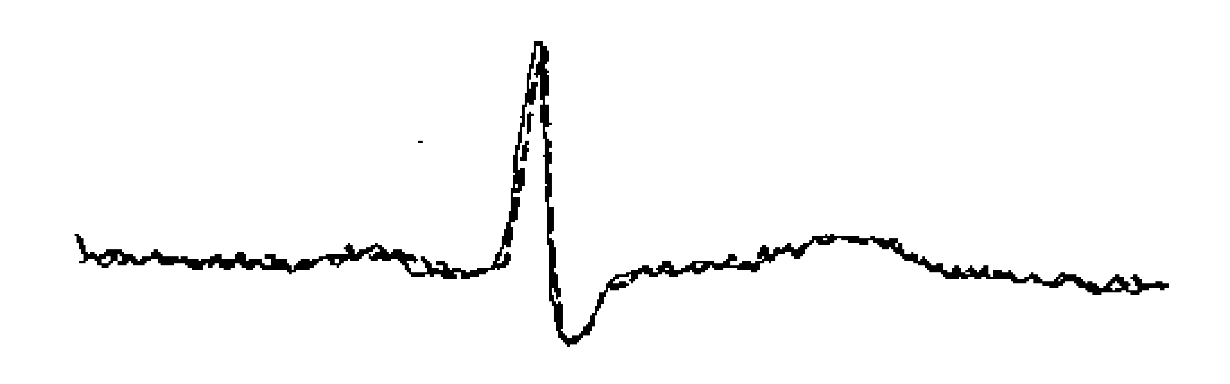


图7.10 原 ECG 图与对图7.9进行 Kalman 滤波得到的估计 ECG 图

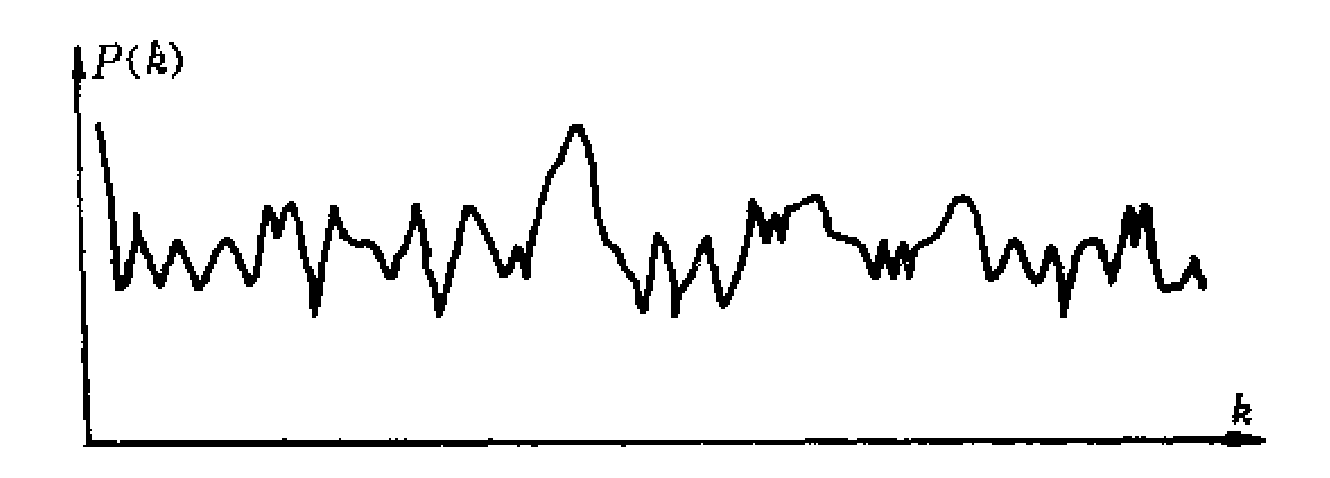



图7.11 Kalman 滤波中 $P_k$ 的变化图

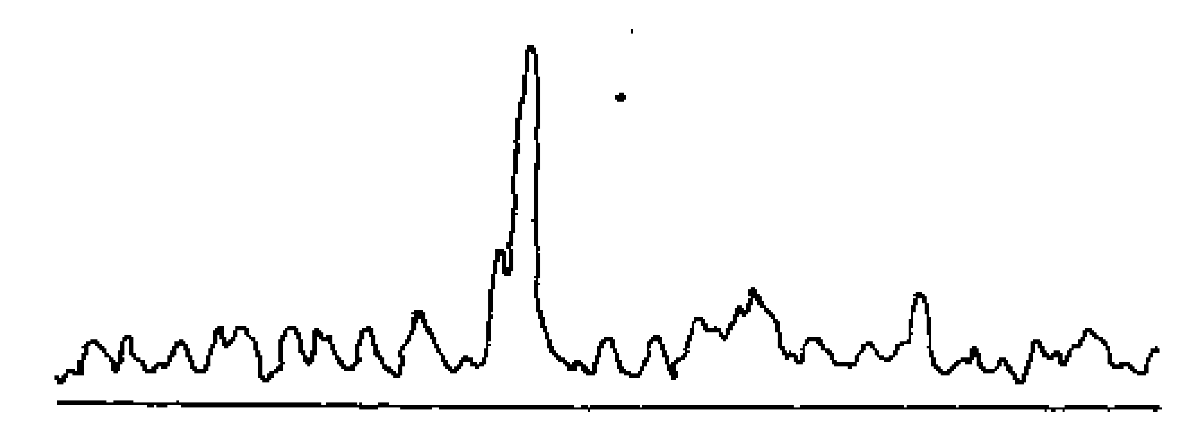



图7.12 利用（7.205）或对 $Q_k$ 进行估计的数值随 $k$ 的变化情况

# 附表1　正态分布表

$$\int_{K_a}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}dx=a$$

| $K_a$ | .00 | .01 | .02 | .03 | .04 | .05 | .06 | .07 | .08 | .09 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0.0 | .5000 | .4960 | .4920 | .4880 | .4840 | .4801 | .4761 | .4721 | .4681 | .4641 |
| 0.1 | .4602 | .4562 | .4522 | .4483 | .4443 | .4404 | .4364 | .4325 | .4286 | .4247 |
| 0.2 | .4207 | .4168 | .4129 | .4090 | .4052 | .4013 | .3974 | .3936 | .3897 | .3859 |
| 0.3 | .3921 | .3783 | .3745 | .3707 | .3669 | .3632 | .3594 | .3557 | .3520 | .3483 |
| 0.4 | .3446 | .3409 | .3372 | .3336 | .3300 | .3264 | .3228 | .3192 | .3156 | .3121 |
| 0.5 | .3085 | .3050 | .3015 | .2981 | .2946 | .2912 | .2877 | .2843 | .2810 | .2776 |
| 0.6 | .2743 | .2709 | .2676 | .2643 | .2611 | .2578 | .2546 | .2514 | .2483 | .2451 |
| 0.7 | .2420 | .2389 | .2358 | .2327 | .2296 | .2266 | .2236 | .2206 | .2177 | .2148 |
| 0.8 | .2119 | .2090 | .2061 | .2033 | .2005 | .1977 | .1949 | .1922 | .1894 | .1867 |
| 0.9 | .1841 | .1814 | .1788 | .1762 | .1736 | .1711 | .1685 | .1660 | .1635 | .1611 |
| 1.0 | .1587 | .1562 | .1539 | .1515 | .1492 | .1469 | .1446 | .1423 | .1401 | .1379 |
| 1.1 | .1357 | .1335 | .1314 | .1292 | .1271 | .1251 | .1230 | .1210 | .1190 | .1170 |
| 1.2 | .1151 | .1131 | .1112 | .1093 | .1075 | .1056 | .1038 | .1020 | .1003 | .0985 |
| 1.3 | .0968 | .0951 | .0934 | .0918 | .0901 | .0885 | .0869 | .0853 | .0838 | .0823 |
| 1.4 | .0808 | .0793 | .0778 | .0764 | .0749 | .0735 | .0721 | .0708 | .0694 | .0681 |
| 1.5 | .0668 | .0655 | 0643 | .0630 | .0618 | .0606 | .0594 | .0582 | .0571 | .0559 |
| 1.6 | .0548 | .0537 | .0526 | .0516 | .0505 | .0495 | .0485 | .0475 | .0465 | .0455 |
| 1.7 | .0446 | .0436 | .0427 | .0418 | .0409 | .0401 | .0392 | .0384 | .0375 | .0367 |
| 1.8 | .0359 | .0351 | .0344 | .0336 | .0329 | .0322 | .0314 | .0307 | .0301 | .0294 |
| 1.9 | .0287 | .0281 | .0274 | .0268 | .0262 | .0256 | .0250 | .0244 | .0239 | .0233 |
| 2.0 | .0228 | .0222 | .0217 | .0212 | .0207 | .0202 | .0197 | .0192 | .0188 | .0183 |
| 2.1 | .0179 | .0174 | .0170 | .0166 | .0162 | .0158 | .0154 | .0150 | .0146 | .0143 |
| 2.2 | .0139 | .0136 | .0132 | .0129 | .0125 | .0122 | .0119 | .0116 | .0113 | .0110 |
| 2.3 | .0107 | .0104 | .0102 | .00990 | .00964 | .00939 | .00914 | .00889 | .00866 | .00842 |
| 2.4 | .00820 | .00798 | .00776 | .00755 | .00734 | .00714 | .00695 | .00676 | .00657 | .00639 |
| 2.5 | .00621 | .00604 | .00587 | .00570 | .00554 | .00539 | .00523 | .00508 | .00494 | .00480 |
| 2.6 | .00466 | .00453 | .00440 | .00427 | .00415 | .00402 | .00391 | .00379 | .00368 | .00357 |
| 2.7 | .00347 | .00336 | .00326 | .00317 | .00307 | .00298 | .00289 | .00280 | .00272 | .00264 |
| 2.8 | .00256 | .00248 | .00240 | .00233 | .00226 | .00219 | .00212 | .00205 | .00199 | .00193 |
| 2.9 | .00187 | .00181 | .00175 | .00169 | .00164 | .00159 | .00154 | .00149 | .00144 | .00139 |

| $K_a$ | .0 | .1 | .2 | .3 | .4 | .5 | .6 | .7 | .8 | .9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 3 | .00135 | $.0^{3}968$ | $.0^{3}687$ | $.0^{3}483$ | $.0^{3}337$ | $.0^{3}233$ | $.0^{3}159$ | $.0^{3}108$ | $.0^{4}723$ | $.0^{4}481$ |
| 4 | $.0^{4}317$ | $.0^{4}207$ | $.0^{4}133$ | $.0^{5}854$ | $.0^{5}541$ | $.0^{5}340$ | $.0^{5}211$ | $.0^{5}130$ | $.0^{6}793$ | $.0^{6}479$ |
| 5 | $.0^{6}287$ | $.0^{6}170$ | $.0^{7}996$ | $.0^{7}579$ | $.0^{7}333$ | $.0^{7}190$ | $.0^{7}107$ | $.0^{8}599$ | $.0^{8}332$ | $.0^{8}182$ |
| 6 | $.0^{9}987$ | $.0^{9}530$ | $.0^{9}282$ | $.0^{9}149$ | $.0^{10}777$ | $.0^{10}402$ | $.0^{10}206$ | $.0^{10}104$ | $.0^{11}523$ | $.0^{11}260$ |

# 附表 2　随机数表

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 03 47 43 73 86 | 36 96 47 36 61 | 46 98 63 71 62 | 33 26 16 80 45 | 60 11 14 10 95 |
| 97 74 24 67 62 | 42 81 14 57 20 | 42 53 32 37 32 | 27 07 36 07 51 | 24 51 79 89 73 |
| 16 76 62 27 66 | 56 50 26 71 07 | 32 90 79 78 53 | 13 55 38 58 59 | 88 97 54 14 10 |
| 12 56 85 99 26 | 96 96 68 27 31 | 05 03 72 93 15 | 57 12 10 14 21 | 88 26 49 81 76 |
| 55 59 56 35 64 | 38 54 82 46 22 | 31 62 43 09 90 | 06 18 44 32 53 | 23 83 01 30 30 |
| | | | | |
| 16 22 77 94 39 | 49 54 43 54 82 | 17 37 93 23 78 | 87 35 20 96 43 | 84 26 34 91 64 |
| 84 42 17 53 31 | 57 24 55 06 88 | 77 04 74 47 67 | 21 76 33 50 25 | 83 92 12 06 76 |
| 63 01 63 78 59 | 16 95 55 67 19 | 98 10 50 71 75 | 12 86 73 58 07 | 44 39 52 38 79 |
| 33 21 12 34 29 | 78 64 56 07 82 | 52 42 07 44 38 | 15 51 00 13 42 | 99 66 02 79 54 |
| 57 60 86 32 44 | 09 47 27 96 54 | 49 17 46 09 62 | 90 52 84 77 27 | 08 02 73 43 28 |
| | | | | |
| 18 18 07 92 45 | 44 17 16 58 09 | 79 83 86 19 62 | 06 76 50 03 10 | 55 23 64 05 05 |
| 26 62 38 97 75 | 84 16 07 44 99 | 83 11 46 32 24 | 20 14 85 88 45 | 10 93 72 88 71 |
| 23 42 40 64 74 | 82 97 77 77 81 | 07 45 32 14 08 | 32 98 94 07 72 | 93 85 79 10 75 |
| 52 36 28 19 95 | 50 92 26 11 97 | 00 56 76 31 38 | 80 22 02 53 53 | 86 60 42 04 53 |
| 37 85 94 35 12 | 83 39 50 08 30 | 42 34 07 96 88 | 54 42 06 87 98 | 35 85 29 48 39 |
| | | | | |
| 70 29 17 12 13 | 40 33 20 38 26 | 13 89 51 03 74 | 17 76 37 13 04 | 07 74 21 19 30 |
| 56 62 18 37 35 | 96 83 50 87 75 | 97 12 25 93 47 | 70 33 24 03 54 | 97 77 46 44 80 |
| 99 49 57 22 77 | 88 42 95 45 72 | 16 64 36 16 00 | 04 43 18 66 79 | 94 77 24 21 90 |
| 16 08 15 04 72 | 33 27 14 34 09 | 45 59 34 68 49 | 12 72 07 34 45 | 99 27 72 95 14 |
| 31 16 93 32 43 | 50 27 89 87 19 | 20 15 37 00 49 | 52 85 66 60 44 | 38 68 88 11 80 |
| | | | | |
| 68 34 30 13 70 | 55 74 30 77 40 | 44 22 78 84 26 | 04 33 46 09 52 | 68 07 97 06 57 |
| 74 57 25 65 76 | 59 29 97 68 60 | 71 91 38 67 54 | 13 58 18 24 76 | 15 54 55 95 52 |
| 27 42 37 86 53 | 48 55 90 65 72 | 96 57 69 36 10 | 96 46 92 42 45 | 97 60 49 04 91 |
| 00 39 68 29 61 | 66 37 32 20 30 | 77 84 57 03 29 | 10 45 65 04 26 | 11 04 96 67 24 |
| 29 94 98 94 24 | 68 49 69 10 82 | 53 75 91 93 30 | 34 25 20 57 27 | 40 48 73 51 92 |

# 参考书籍和文献

〔1〕Aoki,Masanao,State Space Modeling of Time Series Analysis,Springer-Verlag,Berlin,1987

〔2〕Box,G. E. P. and Jenkins,G. M. ,Time Series Analysis, Forecasting and Control. Holden-Day, San Francisco, 1970.

〔3〕Chen,D. et al,Photoelectric Observation of the Occultation of SAO 158687 by Uranian Ring and the Detection of Uranian Ring Signals from the Light Curve. Scientia Sinica,3, 325-335,1978

〔4〕Cramer,H. ,Mathematical Methods of Statistics. Princeton University Press,Princeton N. J. ,1946.

〔5〕Drozen D. ,Vector ECG and Symmetrical Kalman Filtering. In:Cybernetics and Systems'90,R. Trappl ed. ,511—516,World Seientific,Singopore,1990.

〔6〕Elliot,J. L. et al,The Rings of Uranus,Nature,267,26, 1977.

〔8〕Kalman R. E. and Bucy R. S. ,New Results in Linear Filtering and Prediction Theory. Trans. ASME,J. Basic Eng. , 83D,95-108,1961.

〔9〕Lee Y. W. ,Cheatham T. P. and Wiesner J. B. ,Application of Correlation Analysis to the Detection of Periodic Signals in Noise,PIRE,38,1950

〔10〕Miller K. S., Multidimensional Gaussian Distributions, John Wiley, 1964
〔11〕Rivlin, T., Chebysev polynomials, John Wiley & Sons, New York. (1990)
〔12〕Shannon, C. E., A Mathematical Theory of Communication. Bell System Tech. J., 27, 379-423; 623-656, 1948.
〔13〕谢衷洁、程乾生,关于检测天王星环信号的数理统计方法,自动化技术(增刊),1983.
〔14〕谢衷洁,《时间序列分析》,北京大学出版社,1990.
〔15〕Xie, Zhongjie, Case Studies in Time Series Analysis, World Scientific, Singapore, 1993.
〔16〕中国科学院数学研究所概率组编著,《离散时间系统滤波的数学方法》,国防工业出版社,1975.
〔17〕中国科学院计算中心概率统计组编著:《概率统计计算》,科学出版社,1979.
〔18〕格涅坚科:《概率论教程》,人民教育出版社,1956.